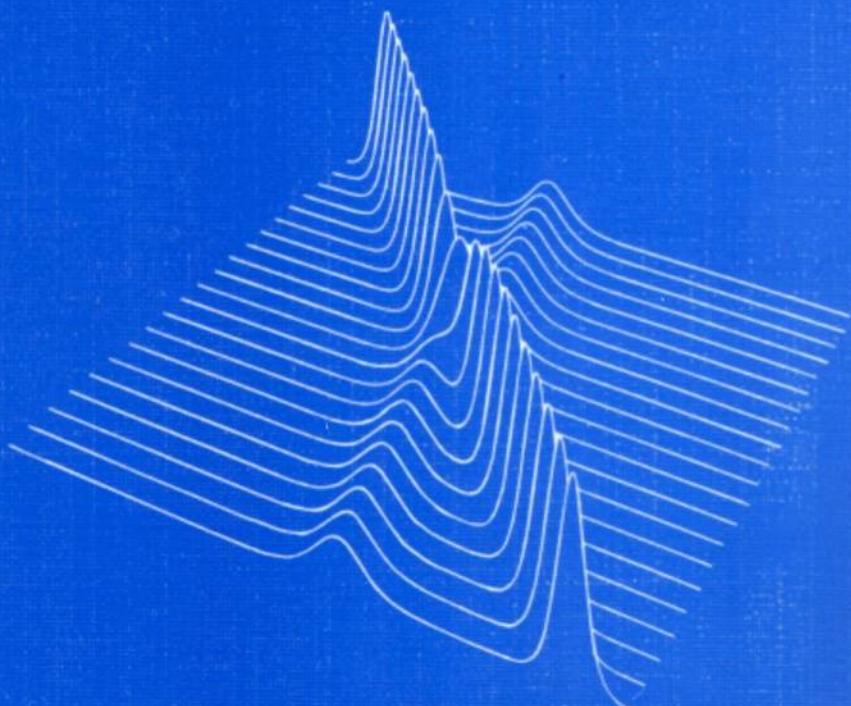


Т. Мива М. Джимбо Э. Датэ

СОЛИТОНЫ:

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ, СИММЕТРИИ
И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ



Т. Мива, М. Джимбо, Э. Датэ

Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры

Перевод с английского С. З. Пакуляк под ред. А. А. Белавина

Москва
Издательство МЦНМО
2005

УДК 517.958

ББК 22.31

М57

Издание осуществлено при поддержке РFFI
(издательский проект № 04-01-14717).

РФИ

Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.

M57 Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры / Пер. с англ. С. З. Пақуляк. — М.: МЦНМО, 2005. — 112 с.: ил.

ISBN 5-94057-162-X

✓ В книге рассмотрены различные алгебраические конструкции, применяемые в теории интегрируемых систем. Большое внимание авторы уделили уравнениям Кортевега—де Фриза и Кадомцева—Петшашили.

Книга предназначена для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

УДК 517.958, ББК 22.31

SOLITON NO SURI

by Tetsusij Miwa, Michio Jimbo, and Etsuro Date

© 1993 by Tetsusij Miwa, Michio Jimbo, and Etsuro Date

Originally published in Japanese in 1993 by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo.

This Russian language edition published in 2005

by MCCME Publishing House, Moscow

by arrangement with the autors c/o Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo.

Translation from the English language edition: Miwa T., Jimbo M., Date E.

Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras.

Cambridge University Press, 2000. All Rights Reserved.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Тэцудзи Мива, Микио Джимбо, Эцуру Датэ

**СОЛИТОНЫ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИММЕТРИИ
И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ**

Редактор О. А. Васильева

Подписано в печать 03.03.05 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 7. Тираж 1000 экз. Заказ № 170т

Издательство Московского центра непрерывного математического образования 119002,
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 5-94057-162-X

© Miwa T., Jimbo M., Date E., 1993

© МЦНМО, перевод на русск. яз., 2005.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Г л а в а 1. Уравнение КдФ и его симметрии	8
§ 1.1. Симметрии и группы преобразования.	8
§ 1.2. Симметрии уравнения КдФ	12
§ 1.3. Лаксова форма эволюционного уравнения (вспомогательные линейные дифференциальные уравнения)	15
Г л а в а 2. Иерархия КдФ	18
§ 2.1. Псевдодифференциальные операторы	18
§ 2.2. Высшие уравнения КдФ	20
§ 2.3. Бесконечное число коммутирующих симметрий	21
§ 2.4. Иерархия КП	23
Г л а в а 3. Уравнения Хироты и вершинные операторы	26
§ 3.1. Производная Хироты	26
§ 3.2. КдФ и n -солитонные решения	29
§ 3.3. Вершинные операторы	31
§ 3.4. Билинейное тождество	34
Г л а в а 4. Исчисление фермионов	38
§ 4.1. Алгебра дифференциальных операторов	38
§ 4.2. Фермионы	40
§ 4.3. Представление Фока	41
§ 4.4. Дуальность, заряд и энергия	44
§ 4.5. Теорема Вика	46
Г л а в а 5. Бозон-фермионное соответствие	49
§ 5.1. Использование производящих функций	49
§ 5.2. Нормальная форма операторов	50
§ 5.3. Построение бозонов из фермионов	52
§ 5.4. Изоморфизм пространств Фока	53
§ 5.5. Представление фермионов через бозоны	55

Г л а в а 6. Группы преобразований и τ-функции	59
§ 6.1. Групповое действие и орбиты	59
§ 6.2. Фермионная реализация алгебры Ли $gl(\infty)$	60
§ 6.3. Группа преобразований иерархии КП.	64
Г л а в а 7. Группа преобразований для уравнения КdФ	67
§ 7.1. Иерархия КdФ в сравнении с иерархией КП	67
§ 7.2. Группа преобразований уравнения КdФ	68
Г л а в а 8. Конечномерные гравссманианы и соотношения Плюккера	72
§ 8.1. Конечномерные гравссманианы	72
§ 8.2. Координаты Плюккера	75
§ 8.3. Соотношения Плюккера	77
Г л а в а 9. Бесконечномерные гравссманианы	82
§ 9.1. Случай конечномерного пространства Фока	82
§ 9.2. Описание вакуумной орбиты	86
§ 9.3. Диаграммы Юнга и характеристические полиномы	88
Г л а в а 10. Билинейное тождество	94
§ 10.1. Билинейное тождество и соотношения Плюккера	94
§ 10.2. Соотношения Плюккера и уравнение Хироты	96
Решение упражнений	100
Указания к литературе	107
Предметный указатель	111

Предисловие

Волны и колебания являются основными формами движения, и их исследования продолжаются с древнейших времен. Волны маленькой амплитуды описываются линейным дифференциальным уравнением, и их поведение может быть детально изучено. Когда амплитуда не мала, дифференциальное уравнение становится нелинейным, и его анализ, вообще говоря, становится крайне сложной проблемой.

Пример нелинейного волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (0.1)$$

которое описывает волны на мелководье, был предложен физиками Кортевегом и де Фризом в конце XIX столетия, и теперь это уравнение называется уравнением КdФ. В частности, если искать решение в форме бегущей волны $u(x, t) = f(x - ct)$, то уравнение (0.1) можно решить. Предположив, что граничные условия на бесконечности таковы, что $u(x, t) \rightarrow 0$ достаточно быстро при $x \rightarrow \pm\infty$, мы можем найти следующее точное решение уравнения (0.1):

$$u_1(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct + \delta) \right), \quad (0.2)$$

где δ — постоянная интегрирования. Движение, описанное этим уравнением, является уединенной волной, локализованной в небольшой области пространства. Известно, что, кроме этого решения, уравнение (0.1) имеет множество точных решений $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ и т. д.

Решения $u_n(x, t)$ содержат $2n$ произвольных параметров c_i , δ_i и при $t \ll 0$ или при $t \gg 0$ ведут себя как суперпозиция независимых изолированных волн вида (0.2). Изолированные волны могут догонять друг друга или сталкиваться друг с другом на конечном промежутке времени, но после столкновения возвращаются в исходное состояние (если не считать возможного фазового сдвига) и продолжают движение не аннигилируя. Волновое движение с таким частицеподобным поведением называется *солитоном*, а решение $u_n(x, t)$, состоящее из n изолированных волн, называется *n-солитонным*.

Для линейного дифференциального уравнения выполняется *принцип суперпозиции*, который гласит, что если известны его частные решения u_i , $i = 1, \dots, N$, то другие решения, содержащие произвольные постоянные,

могут быть получены как линейные комбинации $\sum_{i=1}^N c_i u_i$. Принцип суперпозиции не применим к уравнению КдФ в силу его нелинейности. Тот факт, что, несмотря на это, существуют его точные решения, содержащие произвольное количество параметров, является замечательным и исключительным явлением. Это позволяет предположить, что уравнение КдФ играет особую роль среди обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

В классической механике есть понятие *абсолютно интегрируемой системы* (для краткости мы говорим *интегрируемая система*). Рассмотрим механическую систему с f степенями свободы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad (0.3)$$

где H — гамильтониан. Скажем, что (0.3) — это вполне интегрируемая система, если она имеет f независимых первых интегралов $F_1(q, p) = H(q, p), \dots, F_f(q, p)$. Когда это условие выполнено, общее решение уравнения (3) может быть найдено из системы

$$F_i(q, p) = C_i, \quad i = 1, \dots, f,$$

где C_i — произвольные постоянные. В настоящее время известно, что уравнение КдФ можно интерпретировать как систему, интегрируемую в этом смысле, но имеющую бесконечно много степеней свободы. Существование бесконечного набора точных решений, таких как солитонные решения, отражает факт полной интегрируемости.

Вначале замечательные свойства уравнения КдФ рассматривались исключительно как свойства данного уравнения. Их универсальная природа стала постепенно проясняться в результате интенсивных исследований, проведенных в конце 60-х гг. прошлого века. В настоящий момент известно огромное количество интегрируемых нелинейных дифференциальных (и разностных) уравнений. Общепринятое название для них — солитонные уравнения. Типичным примером таких систем можно считать цепочку Тоды, открытую японским физиком Мориказу Тодой. Было разработано много различных методов нахождения точных решений этих уравнений. Среди них метод обратной задачи рассеяния, который решал задачу с начальными данными, билинейный метод, созданный Рюго Хиротой, теория квази-периодических решений, основанная на римановых поверхностях и тэта-функциях, и т. д.

В то же время, с развитием этой области математики получили новую интерпретацию старые классические результаты. Среди таких результатов следует отметить, в частности, применение тэта-функций в классической механике, возникновение нелинейных дифференциальных уравнений

в дифференциальной геометрии, исследование коммутативных подколец в кольцах дифференциальных операторов и многие другие. Можно сказать, что уравнение КП (Кадомцева–Петвиашвили), которое обобщает уравнение КдФ, уравнение Тоды, производная Хироты и т. д. уже существовали до своего открытия в других формах. Теория интегрируемых систем является парадигмой, обеспечивающей единую точку зрения на эти разнообразные результаты.

В чем состоит главный принцип, стоящий за полной интегрируемостью всех этих систем? Этот принцип можно кратко сформулировать как экстремально высокую степень *симметрии*, заложенной или спрятанной в системе. Вместо слов «высокая степень симметрии» можно также сказать «действие большой группы преобразований». Одной из целей настоящей книги является обсуждение понятия группы бесконечномерных преобразований, действующей на пространствах решений интегрируемых систем. Наши основными примерами будут уравнения КдФ и КП. Японский математик Микио Сато обнаружил, что все решения уравнения КП образуют бесконечномерный грассманнian, и установил алгебраическую природу вполне интегрируемых систем. Мы хотим, не углубляясь в детали, объяснить основы теории Сато и дальнейшее развитие этих идей, предпринятое в исследованиях Масаки Кашивары и настоящих авторов. Мы оставляем за читателем право судить, насколько мы преуспели в достижении нашей цели.

Мы попытались написать книгу так, чтобы ее мог прочесть студент, имеющий базовые знания по дифференциальному исчислению, анализу, линейной алгебре и теории функций комплексной переменной. Из последней понадобится умение вычислять вычеты.

Наконец, мы хотим поблагодарить Сигэки Сугимото, Такеси Судзуки и Масато Хаяси за прочтение рукописи и полезные замечания.

*Тэцудзи Мива
Микио Джимбо
Эцуруо Датэ*

Киото и Осака, 1992 г.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЕ КдФ И ЕГО СИММЕТРИИ

Мы будем исследовать симметрии уравнения КдФ, имеющие форму инфинитезимальных преобразований нелинейных эволюционных уравнений. Само уравнение КдФ является нелинейным эволюционным уравнением, но, как будет показано, оно получается из условий совместности некоторых линейных уравнений.

Лучшим путеводителем в математике и естественных науках является понятие *симметрии*. Следуя этому компасу, поднимем якорь и отправимся вперед, в океан солитонных открытий.

§ 1.1. Симметрии и группы преобразования

Итак, что такое симметрия? Например, рассмотрим симметрии окружности. Интуитивно понятно, что окружность переходит сама в себя

(1) при вращении вокруг своего центра

либо

(2) при отражении относительно диаметра.

Как можно выразить наше интуитивное представление в точных математических терминах? В координатной плоскости (x, y) окружностью является множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (1.1)$$

Вращение плоскости является линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

так же как и вращение вместе с отражением

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Линейное преобразование, заданное формулой

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

является симметрией окружности, если оно сохраняет условие (1.1). Другими словами, преобразование (1.4) является *симметрией* уравнения (1.1), если точка (x', y') есть решение уравнения (1.1) при условии, что точка (x, y) удовлетворяет уравнению (1.1).

Обозначим преобразование (1.2) через $T(\theta)$, а (1.3) — через $S(\theta)$. Набор всех обратимых линейных преобразований образует группу при композиции. Другими словами, если определить произведение двух матриц с ненулевыми детерминантами $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ как $T_1 \cdot T_2 = = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, то групповые аксиомы¹⁾ будут удовлетворены:

- (1) ассоциативность: $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$;
- (2) существование единицы: $T \cdot \text{id} = \text{id} \cdot T$, где $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (3) наличие обратного элемента: $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = \text{id}$.

В частности, элементы, оставляющие окружность (1.1) инвариантной, также образуют группу. Она называется *группой преобразований* окружности. В силу периодичности $T(\theta) = T(\theta')$ или $S(\theta) = S(\theta')$ тогда и только тогда, когда $\theta = \theta' + 2\pi n$, где n — целое число. Групповой закон выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} T(\theta_1) \cdot T(\theta_2) = T(\theta_1 + \theta_2), \\ T(\theta_1) \cdot S(\theta_2) = S(\theta_2) \cdot T(-\theta_1) = S(\theta_1 + \theta_2), \\ S(\theta_1) \cdot S(\theta_2) = T(\theta_1 - \theta_2). \end{cases} \quad (1.5)$$

Если рассматривать правила композиций преобразований (1.5) вместо самих преобразований, симметрии окружности перестают быть просто преобразованиями плоскости и описываются в рамках абстрактного группового закона.

Рассмотрим только вращение окружности $T(\theta)$. Если параметр θ равен 0, то $T(0) = \text{id}$, и, изменяя θ , мы можем рассматривать преобразование

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

как процесс, который перемещает непрерывным образом данное решение (x, y) алгебраического уравнения (1.1) вдоль окружности. Дифференцируя

¹⁾ См. любой учебник по теории групп, например: Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия. Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004. — Прим. ред.

равенство (1.6) по θ , получим

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Преобразование (1.6) полностью определяется этими уравнениями вместе с начальным условием

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ является *инфinitизимальным генератором* вращения в смысле, который будет объяснен ниже. Имеется соотношение

$$T(\theta) = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Раскладывая его по малому параметру θ , получим

$$T(\theta) = 1 + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\theta^2). \quad (1.9)$$

В общем случае, если $R(\theta)$ — преобразование, зависящее от параметра θ и удовлетворяющее равенствам $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1)R(\theta_2)$ и $R(\theta) = 1 + \theta X + O(\theta^2)$, то скажем, что X является *инфinitизимальным генератором* однопараметрического преобразования $R(\theta) = e^{\theta X}$ (ср. обсуждение понятия алгебры Ли в конце этого параграфа). Если $R(\theta)$ действует на исходный объект f , то мы напишем $f^R(\theta) = R(\theta)f$ и

$$\frac{df^R}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} R(\theta)f = Xf^R(\theta). \quad (1.10)$$

Мы будем интересоваться в основном преобразованиями функций (в том числе инфинитезимальными). Например, для функции двух переменных $f(x, y)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - r^2 \right) f(x, y) = 0, \quad (1.11)$$

где r — константа, не зависящая от (x, y) . Для алгебраического уравнения (1.1) мы искали решение в двумерной плоскости (x, y) , а для дифференциального уравнения (1.11) решение $f(x, y)$ должно быть найдено в бесконечномерном векторном пространстве функций двух переменных. Вращение в плоскости (x, y) индуцирует действие $g \mapsto T(\theta)g$ на пространстве функций g от двух переменных (x, y) , задаваемое формулой (см. (1.6))

$$(T(\theta)g)(x, y) = g(x(-\theta), y(-\theta)).$$

Рассмотрев $f^T(x, y; \theta) = (T(\theta)f)(x, y)$, можно получить инфинитезимальное преобразование

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f^T(x, y; \theta) = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f^T(x, y; \theta).$$

Оператор $x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ является инфинитезимальным генератором преобразования. Уравнение (1.11) обладает вращательной симметрией, т. е. если функция f является решением уравнения (1.11), то и $T(\theta)f$ также будет решением. Уравнение (1.11) также инвариантно относительно параллельного переноса $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$. В пространстве функций параллельный перенос задается формулой

$$f(x + a, y + b) = e^{a\partial/\partial x + b\partial/\partial y} f(x, y), \quad (1.12)$$

где производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ есть инфинитезимальные генераторы сдвигов. Раскладывая экспоненту в соотношении (1.12) в ряд, получим не что иное, как разложение Тейлора функции f в окрестности точки (x, y) (впоследствии мы будем часто пользоваться этим фактом, ср. упражнение 1.1).

В следующих главах нам понадобятся начальные сведения об алгебрах Ли. Предположим, что X и Y есть линейные дифференциальные операторы, которые являются инфинитезимальными генераторами групповых операторов $e^{\theta X}$ и $e^{\theta Y}$. Рассмотрим их произведение и назовём *коммутатором* операторов A и B следующую разность:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$e^{\theta X} e^{\theta Y} = e^{\theta X + \theta Y + (1/2)\theta^2[X, Y] + (1/12)\theta^3[X - Y, [X, Y]] + \dots}.$$

В правой части этой формулы, в экспоненте многоточие означает слагаемые старшего порядка по θ . Можно показать, что все эти слагаемые могут быть записаны с использованием только коммутатора $[\cdot, \cdot]$, исключая произведения. Если $[X, Y] = 0$, что означает коммутативность операторов X и Y , то $e^{\theta X} e^{\theta Y} = e^{\theta(X+Y)}$. В этом случае композиция $e^{\theta X} e^{\theta Y}$ двух преобразований совпадает с преобразованием $e^{\theta(X+Y)}$, соответствующим генератору $X + Y$. В общем случае групповые преобразования $e^{\theta X} e^{\theta Y}$ и $e^{\theta(X+Y)}$ не совпадают, но разность между ними может быть выражена через коммутатор инфинитезимальных генераторов.

Алгебра Ли является векторным пространством \mathfrak{g} вместе с правилом, определяющим для любых двух элементов $X, Y \in \mathfrak{g}$ их коммута-

тор $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющий следующим соотношениям:

- (1) $[X, Y] = -[Y, X],$
- (2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$ (1.13)
- (3) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$

(коэффициенты α, β действуют скалярным умножением в векторном пространстве \mathfrak{g}). Если не заботиться о сходимости, то для алгебры Ли \mathfrak{g} набор преобразований

$$G = \{e^X : X \in \mathfrak{g}\}$$

образует группу. Забегая вперед, отметим, что, когда рассматриваются бесконечномерные симметрии, как это происходит в теории солитонов, очень часто работать с алгеброй Ли \mathfrak{g} бывает относительно легко, даже в случаях, когда рассмотрение группы преобразований G приводит к трудностям.

§ 1.2. Симметрии уравнения КdФ

Как объяснялось выше, существует два различных варианта реализации инфинитезимального генератора вращения:

оператором $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в двумерном пространстве;

оператором $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ в бесконечномерном пространстве.

Можно рассмотреть также нелинейные инфинитезимальные преобразования. Запишем следующее дифференциальное уравнение для функций с двумя переменными $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (1.14)$$

Это уравнение КdФ — основной герой настоящей главы. В уравнении (1.14) коэффициенты при $u(\partial u / \partial x)$ и $\partial^3 u / \partial x^3$ были выбраны равными единице, но можно сделать их произвольными ненулевыми константами, умножая t, x и u на любые постоянные множители. Различные уравнения, получаемые таким образом, также называются уравнениями КdФ. Уравнение КdФ описывает инфинитезимальное преобразование функции u , зависящей от координаты x , с течением времени t , задаваемое оператором

$$K(u) = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (1.15)$$

Вообще говоря, уравнение вида $\partial u / \partial t = K(u)$ называется *эволюционным уравнением*. Уравнение называется линейным или нелинейным в зависимости от структуры оператора $K(u)$. Если $K(u)$ — линейный оператор,

то преобразование $u \mapsto K(u)$ является инфинитезимальным генератором, описанным в § 1.1.

Отныне будем полагать, что $K(u)$ является инфинитезимальным генератором, даже в случае, когда он нелинейный. Будем интерпретировать эволюционное уравнение, включая нелинейный случай, как инфинитезимальное преобразование функции и займемся поиском симметрии уравнения КdФ среди этих преобразований. Поставим задачу следующим образом: имеет ли уравнение КdФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(u) \quad (1.16)$$

симметрию вида

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \hat{K}(u). \quad (1.17)$$

Какой смысл заключен в утверждении, что уравнение (1.16) имеет симметрию (1.17)? Рассмотрим функцию трех переменных $u(x, t, s)$. В последующем для простоты обозначений будем использовать следующие обозначения производных (и производных высших порядков):

$$(\partial u / \partial t) = u_t, \quad \partial^3 u / \partial x^3 = u_{xxx} = u_{3x} \quad \text{и т. д.}$$

Полином от функции u и ее производных u_x, u_{xx}, u_{3x} и т. д. называется *дифференциальным полиномом* от u относительно x . Например, полином (1.15) является дифференциальным полиномом от u .

Пусть $\hat{K}(u)$ — дифференциальный полином от u . Рассмотрим (1.17) как эволюционное уравнение по времени s и предположим, что оно может быть решено при заданном начальном значении $u(x, t, s = 0)$. Другими словами, начиная с функции двух переменных $u(x, t, s = 0)$ в момент времени $s = 0$ и решая уравнение (1.17), можно получить функцию $u(x, t, s = \Delta s)$ в момент времени Δs . Сказать, что уравнение (1.17) является симметрией уравнения КdФ, означает, что если $u(x, t, s = 0)$ есть решение уравнения (1.16) в момент времени $s = 0$, то $u(x, t, s)$ тоже будет решением в любой момент времени s .

Рассматривая переменные t и s как равноправные, можно переформулировать вопрос следующим образом: предположим, что t и s — две независимые временные переменные и что нам задана функция $u(x, t = 0, s = 0)$ при $t = 0$ и $s = 0$. Тогда существует два способа определить функцию $u(x, \Delta t, \Delta s)$ в момент времени $(\Delta t, \Delta s)$:

$$\begin{array}{ccc} u(x, t = \Delta t, s = 0) & \xrightarrow{A_2} & u(x, t = \Delta t, s = \Delta s) \\ \uparrow A_1 & & \uparrow B_2 \\ u(x, t = 0, s = 0) & \xrightarrow{B_1} & u(x, t = 0, s = \Delta s) \end{array} \quad (1.18)$$

В этой диаграмме стрелки вверх означают решение уравнения (1.16), а стрелки направо — решение уравнения (1.17). Если композиции стрелок A_1, A_2 и B_1, B_2 дают одинаковый результат, тогда очевидно, что уравнение (1.17) является симметрией уравнения (1.16). Переходя к предельному случаю, когда величины $\Delta t, \Delta s$ в (1.2) очень малы, мы видим, что для выполнения равенства $A_1 \circ A_2 = B_1 \circ B_2$ необходимо, чтобы было справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial s} K(u) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{K}(u). \quad (1.19)$$

Выполняется ли равенство (1.19) при произвольном выборе $\hat{K}(u)$? Например, если мы выберем $\hat{K}(u) = u^2$, то получим

$$\begin{aligned} \text{левая часть} &= (uu_x + u_{3x})_s = u^2 u_x + u(u^2)_x + (u^2)_{3x} = \\ &= 3u^2 u_x + 6u_x u_{xx} + 2u u_{3x}, \\ \text{правая часть} &= (u^2)_t = 2u^2 u_x + 2u u_{3x}. \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнение (1.19) приводит к дополнительному условию $0 = u^2 u_x + 6u_x u_{xx}$. Таким образом, для произвольного выбора $\hat{K}(u)$ уравнения (1.16) и (1.17) несовместимы и уравнение (1.17) не является симметрией уравнения (1.16).

Если в (1.15) присвоить функции u степень 2, производной u_x — степень 3, а производной u_{xx} — степень 4, то правая часть будет однородна и будет иметь степень 5. В поисках симметрий будем считать генератор инфинитезимальных преобразований однородным дифференциальным полиномом (опустив доказательство того, что при этом мы не теряем общности).

Наиболее общий вид однородного дифференциального полинома степени 7 таков:

$$C_1 u^2 u_x + C_2 u u_{3x} + C_3 u_x u_{xx} + C_4 u_{5x}. \quad (1.20)$$

Подставим выражение (1.20) для $\hat{K}(u)$ в уравнение (1.17) и предположим, что $C_1 = 1$. После длинных, но простых вычислений увидим, что остальные коэффициенты C_i определяются однозначным образом при условии совместности уравнений (1.16) и (1.17):

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u^2 u_x + 2u u_{3x} + 4u_x u_{xx} + \frac{6}{5} u_{5x}. \quad (1.21)$$

Замечание 1.1. Существуют однородные дифференциальные полиномы степени 3 и 5, но результирующие симметрии функции $u(x, t)$ отвечают простым параллельным переносам $x \mapsto x + \Delta x$ и $t \mapsto t + \Delta t$.

Продолжая вычисления аналогичным образом, можно убедиться, что для каждой нечетной степени существует ровно одна симметрия. Однако

остается непонятным, как можно повторить эти вычисления для произвольного нечетного числа. Случай, отличающийся от уравнения КдФ, рассмотрен в упражнении 1.2.

§ 1.3. Лаксова форма эволюционного уравнения (вспомогательные линейные дифференциальные уравнения)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$Pw = k^2 w, \quad \text{где} \quad P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \quad (1.22)$$

Пусть u — функция от x и P — оператор, действующий на функциях от x . Число k^2 есть *собственное значение* оператора P , а k называется *спектральной* переменной. Если $u \equiv 0$, то $w = e^{kx}$ является одним из решений. В общем случае решение линейной задачи может быть найдено в виде формального степенного ряда вида

$$w = e^{kx} \left(w_0 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right). \quad (1.23)$$

Слово *формальный* означает, что сходимости этого степенного ряда не требуется. Подставляя выражение (1.23) в уравнение (1.22), получаем рекуррентное соотношение на коэффициенты формального ряда

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad 2 \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_{j-1}}{\partial x^2} + uw_{j-1} = 0 \quad \text{для } j \geq 1.$$

Если предположить, что $w_0 \equiv 1$, то остальные функции w_j , $j \geq 1$, могут быть последовательно определены (с точностью до констант) интегрированием по x .

Введем теперь временную переменную t и позволим данной функции $u = u(x, t)$ изменяться с изменением t . Будем решать уравнение (1.22) с учетом зависимости функции w от времени, определяемой линейным оператором. Оператор P в уравнении (1.22) является дифференциальным оператором второго порядка. Поэтому мы будем искать дифференциальный оператор третьего порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Bw, \quad B = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2. \quad (1.24)$$

Решением этого уравнения является функция $w(x, t; k)$ от двух переменных x, t при любом фиксированном значении k . Известно, что в момент времени $t = 0$ (при условии независимости u от k) функция $w(x, t = 0; k)$ удовлетворяет уравнению (1.22). Верно ли это при других значениях времени t ? (Чтобы этот вопрос имел смысл, следует считать, что при $t \neq 0$

не возникает зависимости функции $u = u(x, t)$ от k .) Если уравнение (1.22) выполняется, то, дифференцируя обе части по t , получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] \right) w = 0. \quad (1.25)$$

Здесь $[P, B] = PB - BP$ является коммутатором дифференциальных операторов P и B и $\partial P / \partial t = \partial u / \partial t$. Итак, уравнение (1.25) включает только производные по x , и, тем самым, оно является обыкновенным дифференциальным уравнением (не зависящим от k). Если (1.25) как уравнение на w справедливо для произвольных значений k , тогда оно имеет бесконечно много независимых решений. Однако это невозможно, за исключением тривиального дифференциального оператора. Таким образом,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [P, B] = 0. \quad (1.26)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при операторах ∂_x^2 и ∂_x , получим следующие условия на коэффициенты u и b_1, b_2 операторов P и B :

$$b_1 = \frac{3}{2}u, \quad b_2 = \frac{3}{4}u_x,$$

тогда как нахождение свободного члена сводится к уравнению КdФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{3x}. \quad (1.27)$$

При этом предполагается, что функции u, b_1, b_2 и их производные по x стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Из этого условия определяются постоянные интегрирования в формулах для b_1 и b_2 . Итак, условия (1.22) и (1.24) совместны, только если $u(x, t)$ является решением уравнения КdФ. Условие совместности (1.26) эквивалентно уравнению КdФ и называется *лаксовой формой* этого уравнения.

Суммируем приведенные выше аргументы схематически:

линейная система уравнений: $Pw = k^2w$	и	$\frac{\partial w}{\partial t} = Bw$
⇓ условие совместности		
представление Лакса для уравнения КdФ: $\frac{\partial P}{\partial t} = [B, P]$		

(1.28)

Заменяя линейный дифференциальный оператор третьего порядка (по x) B линейным дифференциальным оператором более высокого порядка, получим нелинейное эволюционное уравнение, которое называется *высшим уравнением КdФ* и содержит производные более высокого порядка. Уравнения этого типа будут рассмотрены в следующей главе (см. также упражнение 1.3).

Упражнения к главе 1

1.1. Какая функция получается из $f(x) = x$ при инфинитезимальном преобразовании $x^2\partial/\partial x$?

1.2. Определите симметрию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 u_x + u_{xxx}.$$

(Подсказка: рассмотрите $\hat{K}(u) = Au^4 u_x + Bu^2 u_{3x} + Cuu_x u_{2x} + Du_x^3 + Eu_{5x}$ и вычислите $(\partial/\partial t)(\hat{K}(u))$, $(\partial/\partial s)(K(u))$ с помощью метода, изложенного после уравнения (1.19). Затем сравните коэффициенты для определения A, B, C, D, E .)

1.3. Какое уравнение получится из уравнения Лакса (1.26) при изменении ролей операторов P (1.22) и B (1.24)?

ГЛАВА 2

ИЕРАРХИЯ КДФ

Ценность математики состоит в ее свободе определять новые концептуальные понятия и объекты. Наверное, вы еще помните то невероятное чувство, которое ощутили, когда впервые столкнулись с комплексными числами. В этой главе мы рассмотрим оператор, обратный к дифференциальному оператору $\partial/\partial x$. Это позволит нам легко построить и изучить высшие уравнения КдФ.

§ 2.1. Псевдодифференциальные операторы

Говоря об операторах, мы обычно представляем себе некоторые операции, применяемые к функциям. Однако сейчас мы сконцентрируем внимание на композиционных свойствах операторов. Иногда, в зависимости от ситуации, мы сможем сопоставить операторам некоторые операции. В частности, вскоре мы увидим, что может быть определена отрицательная степень дифференциального оператора.

Для простоты обозначений будем писать ∂ , подразумевая производную по x . Для функции f от x рассмотрим оператор $\partial^n \circ f$, полученный как композиция умножения на f и применение оператора ∂^n . Мы можем также записать оператор $\partial^n \circ f$ в следующем виде:

$$\partial^n \circ f = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} (\partial^j f) \circ \partial^{n-j} \quad (2.1)$$

(см. упражнение 2.1). Здесь $\partial^j f$ надо понимать как j -ю производную функции f и $\binom{n}{j}$ — биноминальный коэффициент, определенный формулой

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j(j-1)\dots 1}. \quad (2.2)$$

Для натурального числа j это определение имеет смысл при любых значениях n . Если n — натуральное число, то $\binom{n}{j} = 0$ при $j \geq n + 1$ и поэтому можно считать, что сумма по j в формуле (2.1) берется по всем натураль-

ным числам. Будем использовать формулу (2.1) для определения композиции умножения на функцию f и действия оператора ∂^n для любых значений n . Рассмотрим выражение вида

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \partial^{\alpha-j}, \quad (2.3)$$

которое мы назовем (формальным) *псевдодифференциальным оператором* порядка не выше α . Произведение псевдодифференциальных операторов задается формулой (2.1) (см. упражнения 2.2–2.3).

Пример 2.1. Извлечем квадратный корень из оператора Шрёдингера $\partial^2 + u$. Для этого определим оператор

$$X = \partial + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \partial^{-n} \quad (2.4)$$

с неизвестными функциями f_n и вычислим его квадрат:

$$X^2 = \partial^2 + 2 \sum_{n \geq 1} f_n \partial^{1-n} + \sum_{n \geq 1} (\partial f_n) \partial^{-n} + \sum_{m,n \geq 1 \atop l \geq 0} \binom{-n}{l} f_n (\partial^l f_m) \partial^{-m-n-l}.$$

Если потребовать, чтобы выполнялось равенство $X^2 = \partial^2 + u$, то можно рекуррентно определить все функции f_n . Выпишем несколько первых членов оператора X :

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \frac{1}{2} u \partial^{-1} - \frac{1}{4} u_x \partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8} \right) \partial^{-3} + \dots \quad (2.5)$$

Определим действие псевдодифференциального оператора L , определенного формулой (2.3), на степенные ряды вида

$$w = k^\beta e^{kx} \left(w_0 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right). \quad (2.6)$$

Прежде всего, в случае $w_0 \equiv 1$, $w_1 \equiv w_2 \equiv \dots \equiv 0$ естественно потребовать чтобы выполнялось равенство

$$L(k^\beta e^{kx}) = k^{\alpha+\beta} e^{kx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n k^{-n},$$

так как $\partial^n(e^{kx}) = k^n e^{kx}$ для любого натурального числа n . Теперь степенной ряд w из формулы (2.6) может быть записан в виде

$$w = M e^{kx}, \quad \text{где } M = \sum_{i \geq 0} w_i \partial^{\beta-i}.$$

Таким образом, действие оператора L на w определяется композицией операторов $Lw = L(Me^{kx}) = (L \circ M)(e^{kx})$. Из приведенных аргументов не следует, что действие псевдодифференциальных операторов корректно и непротиворечиво определено, но в данный момент мы не хотим углубляться в тонкости доказательства правильности наших определений.

§ 2.2. Высшие уравнения КдФ

Пусть M — псевдодифференциальный оператор порядка $n \in \mathbb{Z}$,

$$M = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \partial^{n-l}. \quad (2.7)$$

Определим операторы M_{\pm} следующим образом:

$$M_+ = \sum_{l=0}^n g_l \partial^{n-l}, \quad M_- = M - M_+. \quad (2.8)$$

Тогда M_+ является дифференциальным оператором.

Пример 2.2. Вернемся к оператору Шрёдингера $P = \partial^2 + u$, рассмотренному в примере 2.1, и вычислим $(\partial^2 + u)^{3/2}$, используя равенство (2.5). Сравнив соотношения (1.24) и (1.27), убедимся, что

$$B = ((\partial^2 + u)^{3/2})_+. \quad (2.9)$$

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть l — положительное нечетное число. Положим

$$B_l = ((\partial^2 + u)^{l/2})_+ \quad (2.10)$$

и рассмотрим соответствующую лаксову форму уравнения (1.26). Очевидно, что для $P = \partial^2 + u$ выполняется равенство $[P, P^{l/2}] = 0$ и, следовательно,

$$[P, B_l] = -[P, (P^{l/2})_-]. \quad (2.11)$$

В левой части равенства оба оператора P и B_l являются дифференциальными, следовательно, коммутатор $[P, B_l]$ тоже является дифференциальным оператором. В правой части равенства P является дифференциальным оператором порядка 2, а $(P^{l/2})_-$ — псевдо-дифференциальным оператором порядка не выше -1 . Поэтому коммутатор $-[P, (P^{l/2})_-]$ будет псевдодифференциальным оператором порядка не выше чем $2 + (-1) - 1 = 0$ (см. упражнение 2.4). Тогда коммутатор (2.11) является дифференциальным оператором степени 0, т. е. просто функцией.

Эта функция является дифференциальным полиномом от функции u по x . Обозначим $K_l(u) = [P, (P^{l/2})_-]$. С другой стороны, производная $\partial P / \partial t$

равна $\partial u / \partial t$, и лаксова форма (1.26) эквивалентна следующему нелинейному эволюционному уравнению на функцию u :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_l(u).$$

При выводе уравнения (1.27) из (1.26), вычисляя коэффициенты b_1, b_2 , мы основывались на том, что слагаемые дифференциального оператора $[P, B]$ порядка выше чем 0 должны обращаться в 0. Но в силу вышесказанного эти условия автоматически выполняются для оператора (2.10).

§ 2.3. Бесконечное число коммутирующих симметрий

Воспользуемся переменными x_l , занумерованными положительными нечетными числами l (см. упражнение 2.5), и рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_l} = K_l(u) \quad \text{для } l = 1, 3, 5, \dots, \quad \text{где } K_l(u) = -[P, (P^{l/2})_+]. \quad (2.12)$$

В частности, для $i = 1, 3$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u_x \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{3x}.$$

Другими словами, $x_1 = x$, $x_3 = t$ (см. упражнение 2.6). Покажем теперь, что все эти потоки попарно совместны. Необходимо доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_l} K_j(u) = \frac{\partial}{\partial x_j} K_l(u). \quad (2.13)$$

В частности, рассмотрев случай $j = 3$, получим, что функции $K_l(u)$, $l \geq 5$, обеспечивают симметрии уравнения КdФ. При всех других значениях j и l уравнение (2.13) обеспечивает коммутативность симметрий, задаваемых функциями $K_j(u)$ и $K_l(u)$. Это означает, что композиция эволюций по временам x_j и x_l не зависит от порядка в том же смысле, как и на диаграмме (1.2).

Доказательство. Мы имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x_l} = -[P, (P^{l/2})_+].$$

Тогда для любой функции $f(P)$ от P справедливо равенство

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_l} = -[f(P), (P^{l/2})_+].$$

Тем самым,

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (P^{l/2})_+ = \left(\frac{\partial}{\partial x_l} P^{l/2} \right)_+ = -([P^{l/2}, (P^{l/2})_+])_+$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_l} K_j(u) &= -\frac{\partial}{\partial x_l} [P, (P^{l/2})_+] = \\ &= [[P, (P^{l/2})_+], (P^{l/2})_+] + [P, ((P^{l/2}), (P^{l/2})_+)_+]. \quad (2.14)\end{aligned}$$

Используя теперь тот факт, что

$$\begin{aligned}([P^{l/2}, (P^{l/2})_+])_+ &= [(P^{l/2})_+, (P^{l/2})_+] + ((P^{l/2})_-, (P^{l/2})_+)_+ = \\ &= [(P^{l/2})_+, (P^{l/2})_+] - ((P^{l/2})_+, P^{l/2})_+, \end{aligned}$$

два слагаемых в правой части уравнения (2.14) можно записать в виде

$$[P, ((P^{l/2})_+, (P^{l/2})_+)] - [P, ((P^{l/2})_+, P^{l/2})_+]. \quad (2.15)$$

Применяя тождество Якоби (1.13) к соотношениям (2.14) и (2.15), левую часть равенства (2.13) можно переписать как

$$[P, ((P^{l/2}, (P^{l/2})_+))_+] + [[P, (P^{l/2})_+], (P^{l/2})_+],$$

что совпадает с правой частью равенства (2.14) для переставленных индексов j и l . \square

Уравнение (2.12), полученное таким способом, называется уравнением КдФ l -го порядка. Вся система уравнений называется *иерархией КдФ*. Суммируем наш результат в виде диаграммы

линейная система уравнений: $\begin{cases} Pw = k^2 w, \\ \frac{\partial w}{\partial x_l} = (L^l)_+ w, \text{ где } L^2 = P \end{cases}$

\Downarrow условия совместности

иерархия КдФ: $\frac{\partial P}{\partial x_l} = [(L^l)_+, P]$

Итак, при поиске симметрий уравнения КдФ в виде инфинитезимальных преобразований (2.12) мы нашли бесконечно много попарно коммутирующих симметрий. В действительности симметрии уравнения КдФ этим не исчерпываются. Существует гораздо большее семейство некоммутирующих симметрий. Однако до того как мы ими займемся, обобщим наши рассуждения еще больше.

§ 2.4. Иерархия КП

Вместо квадратного корня из оператора Шрёдингера $(\partial^2 + u)^{1/2}$ рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j} \quad (2.16)$$

порядка 1 и соответствующую задачу на собственные значения

$$Lw = kw. \quad (2.17)$$

Введем бесконечный набор переменных $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ и положим $x_1 = x$. Пусть

$$w = e^{\xi(x,k)} \left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right), \quad \text{где} \quad \xi(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j, \quad (2.18)$$

— формальное решение задачи (2.17) (см. упражнение 2.7). Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{\xi(x,k)} = k^j e^{\xi(x,k)}. \quad (2.19)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = B_j w, \quad \text{где} \quad B_j = (L^j)_+, \quad (2.20)$$

и заметим, что условие совместности для (2.17) и (2.20) записывается в виде

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = [B_j, L]. \quad (2.21)$$

Эти соотношения содержат бесконечный набор нелинейных эволюционных уравнений для бесконечного числа функций f_1, f_2, \dots от бесконечного числа переменных (x_1, x_2, x_3, \dots) . Уравнение (2.21) называется *иерархией КП*.

Если оператор L удовлетворяет условию

$$(L^2)_- = 0,$$

то иерархия КП редуцируется к иерархии КдФ. В этом случае $L^2 = \partial^2 + u$ и бесконечный набор функций f_1, f_2, \dots определяется единственной функцией u . Более того, если число j четно, то $[B_j, L] = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$

Итак, от бесконечного набора переменных остаются только те, которые имеют нечетные индексы.

Иерархия КП, определенная выше как уравнение относительно бесконечного числа неизвестных функций, может быть записана через одну неизвестную функцию. Эта неизвестная функция τ называется τ -функцией. Ниже мы обсудим это утверждение, не приводя доказательств.

Будем искать решение уравнения (2.20) в виде формального ряда вида

$$w = M e^{\xi(x,k)}, \quad \text{где} \quad M = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j \partial^{-j}. \quad (2.22)$$

Подставляя выражение (2.22) в уравнение (2.17), получаем соотношение

$$L = M \circ \partial \circ M^{-1} \quad (2.23)$$

между псевдодифференциальными операторами (см. упражнение 2.8). Из равенства (2.23) следует, что можно использовать функции (w_1, w_2, \dots) вместо неизвестных функций (f_1, f_2, \dots) . В действительности из условий совместности (2.21) можно показать, что все эти функции могут быть выражены через одну функцию τ по формуле

$$w = \frac{\tau \left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, x_3 - \frac{1}{3k^3}, \dots \right)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)} e^{\xi(x,k)} \quad (2.24)$$

(см. упражнение 2.9). Из этого соотношения можно выразить (w_1, w_2, \dots) через функцию τ , например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \cdot \tau^{-1}, \quad (2.25)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right) \cdot \tau^{-1}. \quad (2.26)$$

Итак, иерархию КП можно рассматривать как бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно функции τ , зависящей от бесконечного набора переменных (x_1, x_2, x_3, \dots) . В последующем τ -функция τ будет играть фундаментальную роль при обсуждении некоммутирующих симметрий иерархий КdФ и КП. Исходная неизвестная функция u в уравнении КdФ может быть выражена через τ следующим образом:

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau. \quad (2.27)$$

Иерархия КП содержит следующее уравнение относительно u (см. упражнение 2.10)

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right). \quad (2.28)$$

Упражнения к главе 2

2.1. Объясните связь между уравнением (2.1) и правилом Лейбница в дифференциальном исчислении.

2.2. Пусть $L = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \partial^{\alpha-k}$ и $M = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \partial^{\beta-k}$. Вычислите композицию $L \circ M$ (для краткости часто обозначаемую просто как LM).

2.3. Вычислите $(\partial + x)^{-1}$.

2.4. Пусть L_1 и L_2 — два псевдодифференциальных оператора порядков α_1 и α_2 соответственно. Каков порядок операторов $L_1 L_2$ и $[L_1, L_2]$?

2.5. Объясните, почему не имеет смысла рассматривать четные значения l в уравнениях (2.12)?

2.6. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial x_5}$ в уравнениях (2.12)?

2.7. Получите соотношения между f_1, f_2 в равенстве (2.16) и w_1, w_2 в равенстве (2.18).

2.8. Определите M^{-1} для $M = 1 + v_1 \partial^{-1} + v_2 \partial^{-2} + \dots$

2.9. Уравнения (2.25) и (2.26) могут быть переписаны как

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial x_1} = -w_1,$$

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial x_2} = -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}.$$

Докажите, что эти уравнения совместны.

2.10. Выведите формулу (2.28).

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ И ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Теория японского математика Хироты для уравнений билинейного типа является классическим примером свободы творчества в математике. В 1970 г. Хирота изобрел метод нахождения решений уравнения КdФ и других солитонных уравнений. В то время была совершенно непонятна связь этого метода с другими областями математики. Однако хорошая идея в математике никогда долго не остается в изоляции. В этой главе будет описана связь между уравнениями Хироты и вершинными операторами, которые появились впервые в теории элементарных частиц.

§ 3.1. Производная Хироты

Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ одной переменной x можно написать разложение Тейлора произведения $f(x+y)g(x-y)$ в окрестности точки $y=0$ в следующей форме:

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (D_x^j f \cdot g) y^j. \quad (3.1)$$

Оператор $(f, g) \mapsto D_x^j f \cdot g$ будем называть *производной Хироты*.

Пример 3.1. Легко проверить, что

$$D_x f \cdot g = \frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}, \quad D_x^2 f \cdot g = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Заметим, что выражение $D_x^j f \cdot g$ надо понимать как единое целое и не следует думать, что D_x есть некоторый отдельный оператор. Более того, выражение $D_x^j f \cdot g$ не есть произведение некоторого объекта $D_x^j f$ на функцию g . Производная Хироты для функций многих переменных определяется аналогичным способом. Для двух функций многих переменных $f = f(x_1, x_2, \dots)$ и $g = g(x_1, x_2, \dots)$ определим

$$e^{y_1 D_1 + y_2 D_2 + \dots} f \cdot g = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots),$$

где сдвиги $x_i \mapsto x_i \pm y_i$ определены так же, как и в (1.12). Разложив левую часть этого равенства в ряд Тейлора по (y_1, y_2, \dots) , получим

$$f \cdot g + y_1(D_1 f \cdot g) + y_2(D_2 f \cdot g) + \dots + \frac{1}{2} y_1^2(D_1^2 f \cdot g) + \dots$$

Сравнение с рядом Тейлора для правой части определит все производные Хироты.

Пример 3.2. Пусть f есть функция двух переменных (x, t) . Тогда

$$D_t D_x f \cdot f = 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f = \frac{1}{2f^2} (D_x^2 f \cdot f), \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln f = \frac{1}{2f^2} (D_x^4 f \cdot f) - 6 \left(\frac{1}{2f^2} (D_x^2 f \cdot f) \right)^2.$$

Воспользуемся формулой (2.27) для определения новой неизвестной функции τ и перепишем уравнение КдФ (1.27) как уравнение относительно τ . Интегрируя один раз по x , получим

$$8 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \ln \tau = 3 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau \right)^2 + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln \tau.$$

Учитывая вышеприведенные формулы, последнее соотношение можно переписать с использованием производных Хироты:

$$(4D_t D_x - D_x^4) \tau \cdot \tau = 0. \quad (3.2)$$

Будем обозначать через (D_1, D_2, \dots) производные Хироты по переменным (x_1, x_2, \dots) . Уравнением Хироты называется выражение вида

$$P(D_1, D_2, \dots) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3.3)$$

где $P(D_1, D_2, \dots)$ есть полином относительно (D_1, D_2, \dots) . Посмотрим, как решается это уравнение. Если полином P — нечётная функция, то $P\tau \cdot \tau = 0$ для любой функции τ . Например, $D_x \tau \cdot \tau = (\partial \tau / \partial x) \tau - \tau (\partial \tau / \partial x) = 0$. Будем всегда считать полином P четной функцией, что означает выполнение равенства

$$P(D_1, D_2, \dots) = P(-D_1, -D_2, \dots).$$

Предположим также, что $P(0) = 0$, значит, функция $\tau \equiv 1$ всегда будет решением уравнения Хироты. Будем искать решение в виде

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2).$$

Взяв в уравнении (3.3) члены первого порядка по ϵ , получим следующее линейное уравнение для f_1 :

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_1 = 0, \quad \text{где} \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.4)$$

Выбрав набор таких комплексных чисел k_1, k_2, \dots , что

$$P(k_1, k_2, \dots) = 0,$$

получаем, что функция

$$f_1 = e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

является решением уравнения (3.4). В более общей ситуации, если существуют несколько таких наборов $(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots)$, что $P(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots) = 0$, функция

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} \quad (3.5)$$

опять будет решением уравнения (3.4). Конечно, функция $1 + \epsilon f_1$, вообще говоря, не является решением уравнения (3.3) во всех порядках по ϵ . Однако для $n = 1$ мы можем оборвать разложение на линейном по ϵ слагаемом и прямым вычислением убедиться, что функция

$$\tau = 1 + \epsilon e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

удовлетворяет уравнению (3.3). Например, для уравнения КdФ (заменив ϵ на c) получим, что функция

$$\tau = 1 + ce^{2kx + 2k^3 t}$$

есть решение уравнения (3.2). Это решение называется односолитонным.

Решение уравнения Хироты, которое может быть представлено как полином по экспонентам

$$e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}$$

от переменных x_1, x_2, \dots , называется *солитонным решением*. Выражение

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots$$

называют *экспонентой*. В частности, солитонное решение, имеющее n различных экспонент, называется *n-солитонным*.

Выделенным свойством уравнения КdФ как интегрируемой системы является не то, что оно может быть записано в виде уравнения Хироты, а то, что при любом n для решения, обладающего линейным приближением $1 + \epsilon f_1$, функция f_1 будет иметь вид (3.5), т. е. будет существовать n -солитонное решение. Произвольное уравнение Хироты всегда имеет солитонные решения для $n = 1, 2$. Следующее наблюдение является эмпирическим

фактом: существование n -солитонных решений при $n \geq 3$ до некоторой степени эквивалентно интегрируемости рассматриваемой системы.

Рассмотрим случай $n = 2$. Предположим, что для $j = 1, 2$ найдены такие наборы $(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots)$, что $P(k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots) = 0$. Рассмотрим

$$\tau = 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^2 c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} + \varepsilon^2 f_2 + O(\varepsilon^3).$$

Слагаемые второго порядка по ε в уравнении $P(D_1, D_2, \dots)\tau \cdot \tau = 0$ равны

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_2 + c_1 c_2 P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots) e^{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})x_1 + (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})x_2 + \dots} = 0.$$

Разрешив последнее уравнение относительно f_2 , получим

$$f_2 = -\frac{P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots)}{P(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}, k_2^{(1)} + k_2^{(2)}, \dots)} c_1 c_2 e^{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})x_1 + (k_2^{(1)} + k_2^{(2)})x_2 + \dots},$$

и, обрывая разложение функции τ на члене второго порядка по ε , найдём 2-солитонное решение. Для $P = 4D_t D_x - D_x^4$, выбирая $k^{(1)} = (2k_1, 2k_1^3)$ и $k^{(2)} = (2k_2, 2k_2^3)$, получаем

$$f_2(x, t) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} c_1 c_2 e^{2(k_1 + k_2)x + 2(k_1^3 + k_2^3)t}$$

(см. упражнение 3.1).

§ 3.2. КдФ и n -солитонные решения

В этом параграфе будут получены n -солитонные решения уравнения КдФ. В § 3.4 будет доказано, что эти решения совпадают с τ -функцией иерархии КдФ. Введем параметры $c_1, \dots, c_n, k_1, \dots, k_n$ и расширим набор из двух переменных (x, t) до бесконечного набора переменных $x_1 = x, x_3 = t, x_5, x_7$ и т. д. Для набора переменных x_1, x_2, x_3, \dots из формулы (2.18) введём обозначение

$$\xi(x, k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i$$

и определим экспоненты ξ_i вместе с множителями $a_{ii'}$ формулами

$$\xi_i = 2 \sum_{j=1}^{\infty} k_i^{2j+1} x_{2j+1} = \xi(x, k_i) - \xi(x, -k_i), \quad (3.6)$$

$$a_{ii'} = \frac{(k_i - k_{i'})^2}{(k_i + k_{i'})^2}. \quad (3.7)$$

Пусть задано множество $I = \{1, \dots, n\}$. Сумма

$$\tau(x_1, x_3, \dots) = \sum_{J \subset I} \left(\prod_{i \in J} c_i \right) \left(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{ii'} \right) \exp \left(\sum_{i \in J} \xi_i \right) \quad (3.8)$$

по всем возможным поднаборам J из I дает n -солитонное решение иерархии КдФ.

Пример 3.3. В случае $n = 3$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \tau = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_3 e^{\xi_3} + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2} + c_1 c_3 a_{13} e^{\xi_1 + \xi_3} + \\ + c_2 c_3 a_{23} e^{\xi_2 + \xi_3} + c_1 c_2 c_3 a_{12} a_{13} a_{23} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}. \end{aligned}$$

Другими словами, функция $\tau(x_1, x_3, \dots)$ удовлетворяет уравнению

$$(4D_1 D_3 - D_1^4)\tau \cdot \tau = 0.$$

(см. упражнение 3.2).

Введение бесконечного набора переменных требует комментария. Эти переменные соответствуют коммутирующим симметриям уравнения КдФ, рассмотренным в гл. 1, т. е. иерархии КдФ. Зададимся вопросом о возможности записи высших уравнений КдФ в билинейной форме Хироты. Записывая уравнение КдФ порядка $2j + 1$ обычным образом через неизвестную функцию u , мы получим нелинейное дифференциальное уравнение относительно двух переменных x_1 и x_{2j+1} .

Переписать это уравнение в форме Хироты, используя только операторы D_1 и D_{2j+1} , невозможно, но для любого n -солитонного решения (3.8) можно попробовать найти такой полином P , что

$$P(D_1, D_3, \dots)\tau \cdot \tau = 0. \quad (3.9)$$

Очевидно, что искомое уравнение Хироты необходимо искать в виде полинома, содержащего произвольное конечное число производных Хироты. В качестве примера такого полинома для n -солитонного решения вида (3.8) можно рассмотреть полином

$$D_1^6 - 20D_1^3 D_3 - 80D_3^2 + 144D_1 D_5.$$

Для детального изучения этой проблемы присвоим оператору D_{2j+1} степень $2j + 1$ и найдем число уравнений порядка l (включая тривиальные):

порядок	1	2	3	4	5	6	7
количество уравнений	1	0	2	1	3	2	5

Вообще говоря, количество уравнений Хироты из иерархии КдФ порядка m равно $A - B$, где A и B — количества способов представления

числа m в виде суммы положительных целых чисел со следующими ограничениями:

A = количество разбиений числа m на сумму нечетных положительных целых чисел,

B = количество разбиений числа m на сумму положительных целых чисел, сравнимых с $2 \pmod{4}$.

Например, существует еще одно линейно независимое уравнение порядка 6: $D_1^6 + 4D_1^3 - 32D_3^2$. Можно спросить, все ли уравнения, появляющиеся таким образом и переписанные как уравнения относительно функции u , совпадают со всеми уравнениями иерархии КдФ, рассмотренной в гл. I? Это в действительности так, но в данной книге мы не будем заниматься исследованием этого вопроса (см., однако, (3.27)).

§ 3.3. Вершинные операторы

Введение бесконечного набора переменных было существенным шагом для демонстрации симметрий уравнения КдФ. Во-первых, это позволило описать существование коммутирующих симметрий ещё одним способом, а во-вторых, ещё более важна та роль, которую бесконечный набор переменных играет для формулировки некоммутирующих симметрий, к которому мы сейчас и перейдем.

В формуле (1.10) было введено понятие инфинитезимального преобразования. Будем использовать ϵ вместо θ и рассмотрим инфинитезимальное преобразование τ -функции

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \tau(x_1, x_3, \dots) = X\tau(x_1, x_3, \dots).$$

Наша цель — найти инфинитезимальные преобразования такого вида, которые переводят решение τ для иерархии КдФ в другое решение той же иерархии. В действительности мы увидим, что, начиная с n -солитонного решения τ_n , описанного формулой (3.8), можно найти такой оператор X , что функция

$$\tau_{n+1} = e^{\epsilon X} \tau_n$$

является $(n+1)$ -солитонным решением.

Пусть k — параметр, имеющий тот же смысл, что и в обозначении (2.18). Рассмотрим линейный оператор

$$X(k) = \exp \left(2 \sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1} x_{2j+1} \right) \exp \left(-2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}} \right). \quad (3.10)$$

Оператор такого вида называется *вершинным оператором*. Название пришло из теории элементарных частиц, но мы не будем углубляться в объяснение его смысла. Действие оператора $X(k)$ на функцию $f(x_1, x_3, \dots)$ приводит к результату

$$X(k)f(x_1, x_3, \dots) = \exp\left(2 \sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1} x_{2j+1}\right) f\left(x_1 - \frac{2}{k}, x_3 - \frac{2}{3k^3}, \dots\right)$$

(см. (1.12)).

Лемма 3.1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} X(k_1)X(k_2) &= \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \exp\left(2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} k_i^{2j+1} x_{2j+1}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k_i^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, что два оператора A и B , заданные формулами

$$A = -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k_1^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}, \quad B = 2 \sum_{j=0}^{\infty} k_2^{2j+1} x_{2j+1},$$

удовлетворяют соотношению

$$e^A e^B = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^A e^B.$$

Для этого нам понадобится следующая формула, доказательство которой оставим в качестве упражнения (см. упражнение 3.3):

$$\text{если } [A, B] \text{ — скаляр, то } e^A e^B e^{-A} = e^{[A, B]} e^B. \quad (3.11)$$

(Под словом скаляр мы понимаем оператор, не содержащий ни операторов дифференцирования по переменным x_1, x_3, \dots , ни операторов умножения на них.) В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} [A, B] &= -4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{2j+1} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)^l - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^l = \\ &= -\ln\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \ln\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)^2, \end{aligned}$$

значит, оператор $[A, B]$ является скаляром, причём

$$e^{[A,B]} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

что и доказывает лемму. \square

В процессе доказательства было видно, что для большей аккуратности следует рассматривать выражение $(k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2$ как его разложение в ряд Тейлора по степеням числа k_2/k_1 . Из леммы можно, в частности, получить, что

$$e^{cX(k)} = 1 + cX(k).$$

Таким образом, оператор $e^{cX(k)}$. 1 дает 1-солитонное решение. В общем случае n -солитонное решение в форме (3.8) получается из действия оператора

$$\tau = e^{c_1 X(k_1)} \dots e^{c_n X(k_n)} \cdot 1. \quad (3.12)$$

Получим и исследуем вершинные операторы и n -солитонные решения для уравнения КП. Уравнение КП (2.28) в форме Хироты имеет вид

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3)\tau \cdot \tau = 0. \quad (3.13)$$

Мы оставляем это вычисление читателю как интересное упражнение. Положим $P(k_1, k_2, k_3) = k_1^4 + 3k_2^2 - 4k_1 k_3$. Тогда решение уравнения $P(k_1, k_2, k_3) = 0$ может быть найдено в виде

$$(k_1, k_2, k_3) = (p - q, p^2 - q^2, p^3 - q^3) \quad (3.14)$$

для любых p, q . Более того, для двух разных решений

$$(k_1, k_2, k_3) = (p_1 - q_1, p_1^2 - q_1^2, p_1^3 - q_1^3),$$

$$(k'_1, k'_2, k'_3) = (p_2 - q_2, p_2^2 - q_2^2, p_2^3 - q_2^3)$$

мы имеем

$$-\frac{P(k_1 - k'_1, k_2 - k'_2, k_3 - k'_3)}{P(k_1 + k'_1, k_2 + k'_2, k_3 + k'_3)} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}.$$

В n -солитонном решении (3.8) положим

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} (p_i^j - q_i^j) x_j = \xi(x, p_i) - \xi(x, q_i) \quad (3.15)$$

и

$$a_{ii'} = \frac{(p_i - p_{i'})(q_i - q_{i'})}{(p_i - q_{i'})(q_i - p_{i'})}. \quad (3.16)$$

Вершинный оператор $X(p, q)$, дающий n -солитонное решение уравнения КП, равен

$$X(p, q) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(p^j - q^j)x_j\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(p^{-j} - q^{-j})\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \quad (3.17)$$

(см. упражнение 3.4). Тогда формула

$$\tau = e^{c_1 X(p_1, q_1)} \dots e^{c_n X(p_n, q_n)}. \quad (3.18)$$

дает n -солитонное решение. С учетом равенства (3.15) и (3.16) оно может быть записано в виде

$$\tau(x_1, x_2, \dots) = \sum_{J \subset I} \left(\prod_{i \in J} c_i \right) \left(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{ii'} \right) \exp\left(\sum_{i \in J} \xi_i\right). \quad (3.19)$$

В следующем параграфе мы докажем, что эта τ -функция действительно удовлетворяет иерархии КП. Условия $p_i = -q_i$ редуцируют решение иерархии КП (3.19) до решения иерархии КдФ (3.8).

§ 3.4. Билинейное тождество

Докажем, что функция (3.18) является решением иерархии КП. Ключевым для этого доказательства является следующий результат.

Теорема 3.1 (билинейное тождество). Для любых x и x' положим

$$\xi = \xi(x, k), \quad \xi' = \xi(x', k).$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$0 = \oint \frac{dk}{2\pi i} e^{\xi - \xi'} \tau\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \tau\left(x'_1 + \frac{1}{k}, x'_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right), \quad (3.20)$$

где i — мнимая единица.

Здесь контурный интеграл $\oint \frac{dk}{2\pi i}$ означает, что подынтегральная функция раскладывается в ряд в окрестности точки $k = \infty$ и берется коэффициент при k^{-1} . Если подынтегральная функция является голоморфной на комплексной плоскости за исключением полюсов в конечном числе точек $k \in \mathbb{C}$, то интеграл может быть вычислен как сумма вычетов в этих точках (см. упражнение 3.5).

Доказательство. Докажем равенство (3.20). Нужно показать, что если в формуле (3.19) заменить x_j на $x_j - \frac{1}{jk^i}$ и аналогично x'_j на $x'_j + \frac{1}{jk^i}$, то, вычисляя сумму вычетов в полюсах, мы получим 0. Вычисляя

величину ξ_i из равенства (3.15) в точке $\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right)$, получим

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(p_i^j - q_i^j)\left(x_j - \frac{1}{jk^j}\right)\right) = \frac{k - p_i}{k - q_i} e^{\xi_i}.$$

Аналогично

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(p_i^j - q_i^j)\left(x'_j - \frac{1}{jk^j}\right)\right) = \frac{k - q_i}{k - p_i} e^{\xi'_i}.$$

Вычет в точке $k = q_i$ равен

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J \subset I} \left(\prod_{l \in J} c_l \right) \left(\prod_{\substack{l, l' \in J \\ l < l'}} a_{ll'} \right) e^{\sum_{l \in J \setminus \{i\}} \xi_l (q_i - p_i)} \prod_{l \in J \setminus \{i\}} \frac{q_i - p_l}{q_i - q_l} e^{\xi(x, p_i)} \times \\ & \quad \times \sum_{i \notin J' \subset I} \left(\prod_{l \in J'} c_l \right) \left(\prod_{\substack{l, l' \in J' \\ l < l'}} a_{ll'} \right) e^{\sum_{l \in J' \setminus \{i\}} \xi'_l \frac{q_i - q_l}{q_i - p_l} e^{-\xi(x', q_i)}} = \\ & = c_i (q_i - p_i) e^{\xi(x, p_i) - \xi(x', q_i)} \sum_{i \notin J \subset I} \left(\prod_{l \in J} c_l \right) \left(\prod_{\substack{l, l' \in J \\ l < l'}} a_{ll'} \right) \prod_{l \in J} \frac{p_i - p_l}{p_i - q_l} e^{\sum_{l \in J} \xi_l} \times \\ & \quad \times \sum_{i \notin J' \subset I} \left(\prod_{l \in J'} c_l \right) \left(\prod_{\substack{l, l' \in J' \\ l < l'}} a_{ll'} \right) \prod_{l \in J'} \frac{q_i - q_l}{q_i - p_l} e^{\sum_{l \in J'} \xi'_l}. \end{aligned}$$

Вычет в точке $k = p_i$ вычисляется аналогичным образом, и при сложении эти два вычета взаимно уничтожаются. \square

Воспользуемся теперь билинейным тождеством, чтобы продемонстрировать, что τ -функция обеспечивает решение иерархии КП, заданной в следующих двух формах:

- (i) как система линейных уравнений (2.20) и
- (ii) как система билинейных уравнений (3.9).

Положим

$$w(x, k) = \frac{\tau\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right)}{\tau(x_1, x_2, \dots)} e^{\xi(x, k)}, \quad (3.21)$$

$$w^*(x, k) = \frac{\tau\left(x_1 + \frac{1}{k}, x_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right)}{\tau(x_1, x_2, \dots)} e^{-\xi(x, k)}. \quad (3.22)$$

Тогда эти функции имеют вид

$$\omega(x, k) = e^{\xi(x, k)} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{w_l}{k^l} \right), \quad (3.23)$$

$$\omega^*(x, k) = e^{-\xi(x, k)} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{w_l^*}{k^l} \right) \quad (3.24)$$

и, как мы только что доказали, удовлетворяют уравнению

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} \omega(x, k) \omega^*(x', k) = 0. \quad (3.25)$$

Получим систему (2.20) из уравнения (3.25). Для этого нам необходимы два следующих простых утверждения относительно уравнения (3.25):

(1) для любого дифференциального оператора Q по переменным (x_1, x_2, \dots) из уравнения (3.25) следует равенство

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} (Q\omega(x, k)) \omega^*(x', k) = 0;$$

(2) если степенной ряд вида

$$\bar{\omega}(x, k) = e^{\xi(x, k)} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\bar{w}_l}{k^l} \quad (3.26)$$

удовлетворяет уравнению

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} \bar{\omega}(x, k) \omega^*(x', k) = 0,$$

то $\bar{w}_1 \equiv \bar{w}_2 \equiv \dots \equiv 0$ (см. упражнение 3.6).

Докажем равенства (2.20). Определим оператор L формулами (2.22) и (2.23) при помощи функции ω , заданной соотношением (3.22). Для оператора

$$Q = \frac{\partial}{\partial x_j} - (L^j)_+$$

справедливо уравнение

$$Q\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - L^j \omega + (L^j)_- \omega,$$

где в силу равенства (2.17) комбинация $(\partial \omega / \partial x_j) - L^j \omega$ имеет вид (3.26).

То же справедливо и для оператора $(L^j)_- \omega = (L^j)_M \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} k^i x_i \right)$. Следовательно, функция $Q\omega$ имеет вид (3.26). Тогда в силу утверждений (1) и (2) мы получим $Q\omega = 0$. \square

Уравнения Хироты на τ -функцию возникают из билинейного тождества следующим образом. Делая замену переменных $x_j = x_j + y_j$, $x'_j = x_j - y_j$, получаем

$$\begin{aligned} \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp\left(2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \tau\left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \times \\ \times \tau\left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right) = \\ = \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp\left(2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_j - \frac{1}{lk^l}\right) D_l\right) \tau \cdot \tau. \end{aligned}$$

Раскладывая функцию

$$\exp\left(2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_j - \frac{1}{lk^l}\right) D_l\right) \quad (3.27)$$

в ряд по степеням (y_1, y_2, \dots) и вычисляя коэффициент при k^{-1} , мы получим различные уравнения типа Хироты (см. упражнение 3.7).

Упражнения к главе 3

- 3.1. Найдите какие-либо решения уравнения (3.2), полиномиальные по x и t .
- 3.2. Проверьте, что 3-солитонное решение уравнения КdФ удовлетворяет соотношению (3.2).
- 3.3. Докажите формулу (3.11).
- 3.4. Вычислите произведение $X(p_1, q_1)X(p_2, q_2)$ и коммутатор $[X(p_1, q_1), X(p_2, q_2)]$, следуя методу, изложенному при доказательстве леммы 3.3. Обращается ли этот коммутатор в нуль?
- 3.5. Найдите τ -функцию иерархии КП, полиномиальную по трем переменным (x_1, x_2, x_3) . Другими словами, вы должны найти полином, который является решением уравнения (3.20).
- 3.6. Докажите утверждение (2), касающееся ряда (3.26).
- 3.7. Докажите, что уравнение (3.13) следует из (3.27).

ГЛАВА 4

ИСЧИСЛЕНИЕ ФЕРМИОНОВ

Изучая солитоны и их основные свойства, мы начинаем понимать алгебраические структуры, стоящие за симметриями солитонных уравнений. В этой главе будут введены и изучены фермионы и их исчисление, необходимое для описания указанных симметрий.

§ 4.1. Алгебра дифференциальных операторов

До сих пор мы рассматривали инфинитезимальные преобразования дифференциальных уравнений (или функций) в терминах эволюционных уравнений. В случае уравнений КdФ и КП, которые имеют бесконечно много симметрий, а также для рассмотрения соответствующих иерархий как единых целых были введены функции от бесконечного числа переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$. В данный момент для определенности мы ограничимся рассмотрением полиномов от этих переменных. Хотя количество переменных бесконечно, каждый полином есть конечная сумма мономов и, следовательно, включает в себя лишь конечное число переменных. Вычисляя вес полинома, мы присвоим каждой переменной x_n вес n .

Говоря про преобразования функций, мы обычно имеем в виду такие базовые операции, как дифференцирования и умножения на мономы, составленные из переменных x_n . Определим операторы a_n и a_n^* , действующие на полином $f(x)$, по правилам

$$(a_n f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \quad (a_n^* f)(x) = x_n f(x). \quad (4.1)$$

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям, называемым *каноническими коммутационными соотношениями*:

$$[a_m, a_n] = 0, \quad [a_m^*, a_n^*] = 0 \quad \text{и} \quad [a_m, a_n^*] = \delta_{m,n}. \quad (4.2)$$

Можно рассмотреть операции произведения и суммирования дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами

$$\sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \beta_1 \beta_2 \dots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\beta_2} \dots, \quad (4.3)$$

что превращает этот набор операторов в алгебру.

Будем рассматривать $\{a_n, a_n^*\}_{n=1,2,\dots}$ как набор абстрактных символов, удовлетворяющих соотношениям (4.2). Символы a_n и a_n^* будем называть *бозонами*. В более общей ситуации из набора символов S и набора соотношений R между ними, пользуясь произвольное число раз операциями умножения, суммирования и умножения на числа, можно получить *алгебру, порожденную этим набором S и этими определяющими соотношениями R* . Алгебра \mathcal{B} , порожденная набором $S = \{a_n, a_n^*\}_{n=1,2,\dots}$, с определяющими соотношениями (4.2) называется *алгеброй Гейзенберга*. Применяя последовательно канонические коммутационные соотношения, можно единственным образом выразить любой элемент алгебры \mathcal{B} как линейную комбинацию следующих элементов:

$$a_{m_1}^{*\alpha_1} \dots a_{m_r}^{*\alpha_r} a_{n_1}^{\beta_1} \dots a_{n_s}^{\beta_s}$$

для $m_1 < \dots < m_r, n_1 < \dots < n_s$ и $\alpha_i, \beta_j = 1, 2, \dots$

Представлением алгебры A в векторном пространстве V называется линейное отображение $\rho: A \rightarrow \text{End}(V)$, удовлетворяющее соотношению $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ для всех $a, b \in A$. Если алгебра A задана образующими S и определяющими соотношениями R , то существование представления алгебры означает, что линейное отображение $\rho(s)$ в V задано для каждого $s \in S$ и что соотношения R выполнены.

В соответствии с этим определением формулы (4.1) означают, что, задав $\rho(a_n) = \partial/\partial x_n$ и $\rho(a_n^*) = x_n$ (умножение на переменную x_n), мы определим представление алгебры Гейзенберга \mathcal{B} в пространстве всех полиномов $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$. Пространство представления $\mathbb{C}[x]$ называется *бозонным пространством Фока*. Операторы дифференцирования $a_n = -\partial/\partial x_n$ называются операторами *уничтожения*, а операторы умножения $a_n^* = x_n$ — операторами *рождения*. Заметим, что все операторы рождения коммутируют между собой, так же как и операторы уничтожения.

Элемент $1 \in \mathbb{C}[x]$ называется *вакуумным вектором* и обладает следующими очевидными свойствами:

(1) любой оператор уничтожения φ переводит вакуумный вектор в нуль: $\varphi \cdot 1 = 0$;

(2) пространство Фока порождается этим вектором:

$$\mathbb{C}[x] = \mathcal{B} \cdot 1 := \{a \cdot 1 : a \in \mathcal{B}\}. \quad (4.4)$$

Другими словами, пространство $\mathbb{C}[x]$ обладает базисом

$$\{a_{m_1}^* \dots a_{m_r}^* \cdot 1 : 0 < m_1 \leq \dots \leq m_r\}, \quad (4.5)$$

полученным последовательным применением операторов рождения к вакуумному вектору.

Возможно, читателю не понравится, что о простых вещах говорится слишком громоздким языком. В последующем бозоны будут использоватьсь в их абстрактной форме (4.2), а не как конкретные операторы дифференцирования и умножения. Поэтому наберитесь терпения и продолжайте следовать логике нашего изложения.

§ 4.2. Фермионы

Кроме алгебры бозонов \mathcal{B} , мы будем работать в основном с другой алгеброй \mathcal{A} , полученной из тех же канонических коммутационных соотношений заменой коммутатора $[X, Y] = XY - YX$ на *антикоммутатор*

$$[X, Y]_+ := XY + YX.$$

Определение 4.1. Введем символы ψ_n , ψ_n^* и следующие базисные соотношения между ними, называемыми *каноническими антикоммутационными соотношениями* (можно считать, что индексы n принадлежат любому множеству, но удобно выбрать индекс $n \in \mathbb{Z} + 1/2$, принадлежащий множеству полуцелых чисел):

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = 0, \quad [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0 \quad \text{и} \quad [\psi_m^*, \psi_n]_+ = \delta_{m+n, 0}. \quad (4.6)$$

Символы ψ_n , ψ_n^* называются *фермионами*, а алгебру \mathcal{A} с соотношениями (4.6), которую они порождают, — *алгеброй Клиффорда*. Обратите внимание, что соотношения (4.6) содержат как частный случай определяющее свойство фермионов

$$\psi_n^2 = 0, \quad \psi_n^{*2} = 0.$$

Так же как и в случае с бозонами, используя последовательно соотношения (4.6), можно изменить порядок перемножения символов ψ_m , ψ_n^* в любом мономе, так что произвольный элемент алгебры \mathcal{A} будет записан как линейная комбинация упорядоченных мономов вида

$$\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^*, \quad (4.7)$$

где $m_1 < \dots < m_r$ и $n_1 < \dots < n_s$.

Замечание 4.1. Вопрос о том, насколько хорошо определена алгебра \mathcal{A} и не содержит ли она внутренних противоречий, заслуживает отдельного

и тщательного изучения. Аргументы не очень сложны, но их приведение уведет нас далеко от основного содержания этой книги, поэтому мы их опускаем¹⁾. Приведем только окончательный вывод: элементы (4.7) линейно независимы и образуют базис векторного пространства \mathcal{A} .

Суммируем сходства и различия между бозонами и фермионами. Для простоты ограничимся случаем только двух образующих a , a^* и ψ , ψ^* . Изученное нами сведём в табл. 4.2. Алгебра Клиффорда \mathcal{A} , порожденная конечным числом фермионов, всегда конечномерна, тогда как алгебра Гейзенберга \mathcal{B} бесконечномерна даже в случае двух образующих.

Таблица 4.1

Свойства и различия между бозонами и фермионами

	Алгебра Гейзенберга \mathcal{B}	Алгебра Клиффорда \mathcal{A}
образующие	Бозоны a , a^*	Фермионы ψ , ψ^*
соотношения	$aa^* - a^*a = 1$	$\psi\psi^* + \psi^*\psi = 1$, $\psi^2 = \psi^{*2} = 0$
базис	$a^m a^{*n}$ для $m, n = 0, 1, 2, \dots$	$1, \psi, \psi^*, \psi\psi^*$

Фермионы можно реализовать в виде матриц. В приведенном примере достаточно положить

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ср. упражнение 4.1). Наоборот, бозоны не могут быть представлены никакой матрицей конечного размера: предположив, что A , A^* — матрицы размера $n \times n$, удовлетворяющие соотношению $AA^* - A^*A = 1$, немедленно приходим к противоречию, взяв след этого соотношения $0 = \text{Tr}(AA^*) - \text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(1) = n$.

§ 4.3. Представление Фока

Обсудим фермионный аналог представления Фока бозонов в пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$.

Рассмотрим диаграмму, составленную из черных и белых камней, как в игре «го», выстроенных вдоль вещественной оси и занумерованных полуцелыми числами. Потребуем при этом, чтобы далеко справа (когда $n \gg 0$) все камни были черными, а далеко слева (когда $n \ll 0$) — белыми. Диаграммы такого вида называются *диаграммами Майя* (см. рис. 4.1).

¹⁾ См., например, Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. Гл. 9, § 9. — М.: Наука, 1966.

Обозначив через m_1, m_2, \dots положения черных камней, можно сопоставить каждой диаграмме Майя возрастающую последовательность полуцелых чисел

$$\mathbf{m} = \{m_i\}_{i \geq 1}, \quad m_1 < m_2 < m_3 < \dots, \quad (4.8)$$

где, как мы знаем, $m_{j+1} = m_j + 1$ для достаточно больших j . Обозначим через \mathcal{F} векторное пространство, порожденное набором диаграмм Майя,

$$\cdots \circ \circ \bullet \bullet \circ \circ \bullet \circ \bullet \bullet \cdots \\ -\frac{5}{2} -\frac{3}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}$$

Рис. 4.1. Диаграмма Майя

и назовем его *фермионным пространством Фока*. Базисный вектор, отвечающий диаграмме (4.8), обозначим как $|\mathbf{m}\rangle$. Определим левое действие фермионов на пространстве Фока по следующим правилам:

$$\psi_n |\mathbf{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} | \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots \rangle, & \text{если } m_i = -n \text{ для некоторого номера } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\psi_n^* |\mathbf{m}\rangle = \begin{cases} (-1)^i | \dots, m_i, n, m_{i+1}, \dots \rangle, & \text{если } m_i < n < m_i + 1 \text{ для некоторого номера } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.10)$$

В случае $i = 1$ равенство (4.9) нужно интерпретировать как $|m_2, m_3, \dots\rangle$, а для $i = 0$ равенство (4.10) нужно интерпретировать как $|n, m_1, m_2, \dots\rangle$. Можно проверить, что канонические антисимметрические соотношения (4.6) для такого действия выполнены. Фермионы ψ_n порождают белые камни на позициях $-n$ (или, что эквивалентно, уничтожают там черные камни), тогда как фермионы ψ_n^* порождают черные камни на позициях n (или уничтожают там белые камни).

Поделим все фермионы на два класса:

фермионы $\{\psi_n, \psi_n^*\}$ для $n < 0$ называются *операторами рождения*,

фермионы $\{\psi_n, \psi_n^*\}$ для $n > 0$ называются *операторами уничтожения*.

Тогда все операторы рождения антисиммутируют между собой, а все операторы уничтожения антисиммутируют (будем говорить, что операторы X и Y антисиммутируют, если $XY = -YX$). Рассмотрим вектор, отвечающий диаграмме, где все позиции с отрицательными номерами $n < 0$ заполнены белыми камнями, а с положительными $n > 0$ — черными. Для этого вектора, который мы обозначим символом $|\text{vac}\rangle$, выполняются равенства

$m_j = j - 1/2$, $j = 1, 2, \dots$. Назовем этот вектор *вакуумным*. Он обладает следующими свойствами:

(1) любой оператор уничтожения ϕ обращает в нуль вакуумный вектор: $\phi |\text{vac}\rangle = 0$.

(2) пространство Фока \mathcal{F} порождается вакуумным вектором:

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} \cdot |\text{vac}\rangle := \{a |\text{vac}\rangle : a \in \mathcal{A}\}.$$

Известно, что пространство Фока полностью характеризуется этими двумя свойствами. Применяя последовательно операторы рождения к вакуумному вектору, можно получить (с точностью до знака) вектор, отвечающий любой диаграмме Майя:

$$\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^* |\text{vac}\rangle \text{ для } m_1 < \dots < m_r < 0 \text{ и } n_1 < \dots < n_s < 0. \quad (4.11)$$

Элементы (4.11) линейно независимы и образуют базис в \mathcal{F} .

Пример 4.1. Следующий пример помогает лучше понять структуру представления Фока и правило знаков, которые возникают у векторов пространства \mathcal{F} . Введем «ложный вакуумный вектор» $|\Omega\rangle$, который уничтожается всеми фермионами ψ_n , $n \in \mathbb{Z} + 1/2$. Тогда «настоящий» вакуумный вектор $|\text{vac}\rangle$ можно формально рассматривать как вектор, полученный последовательным применением бесконечного числа операторов ψ_n^* к $|\Omega\rangle$:

$$|\text{vac}\rangle = \psi_{1/2}^* \psi_{3/2}^* \psi_{5/2}^* \dots |\Omega\rangle.$$

Легко убедиться, что элемент в правой части этого равенства уничтожается всеми операторами уничтожения ψ_n , ψ_n^* для $n > 0$.

Соответствующая структура вакуума в физике элементарных частиц называется *мером Дирака*: вакуумный вектор представляет собой не состояние, в котором совсем отсутствуют частицы, а состояние, в котором присутствуют античастицы, заполняющие все возможные «дырки».

Применяя теперь операторы рождения, получаем

$$\begin{aligned} \psi_{-3/2} |\text{vac}\rangle &= \psi_{-3/2} \psi_{1/2}^* \psi_{3/2}^* \psi_{5/2}^* \dots |\Omega\rangle = -\psi_{1/2}^* \psi_{-3/2} \psi_{3/2}^* \psi_{5/2}^* \dots |\Omega\rangle = \\ &= -\psi_{1/2}^* \psi_{5/2}^* \psi_{7/2}^* \dots |\Omega\rangle, \\ \psi_{-3/2}^* |\text{vac}\rangle &= \psi_{-3/2}^* \psi_{1/2}^* \psi_{3/2}^* \psi_{5/2}^* \dots |\Omega\rangle \end{aligned}$$

и т. д., что объясняет, в частности, и правило знаков. Эти формулы проиллюстрированы на рис. 4.2 как уничтожение черного камня (что эквивалентно рождению белого камня) на месте с номером $3/2$, и наоборот, уничтожение белого камня (рождение белого) на месте с номером $-3/2$.

§ 4.4. Дуальность, заряд и энергия

Аналогично пространству Фока \mathcal{F} определим дуальное пространство Фока \mathcal{F}^* . В этом случае мы будем описывать диаграмму Майя положениями белых камней \dots, n_3, n_2, n_1 ($n_i \in \mathbb{Z} + 1/2$). Элементам векторного

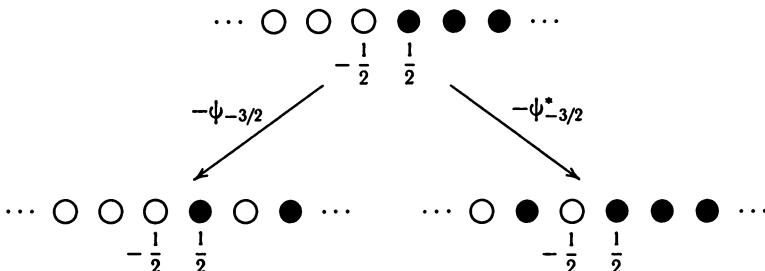


Рис. 4.2. Операторы рождения и уничтожения

пространства \mathcal{F}^* сопоставим диаграммы Майя, а базисные векторы запишем как

$$\langle \mathbf{n}| = \langle \dots, n_3, n_2, n_1|, \quad \text{где } \dots < n_3 < n_2 < n_1,$$

и $n_{j+1} = n_j - 1$ для достаточно больших значений j . Определим правое действие фермионов на пространстве \mathcal{F}^* по следующему правилу:

$$\langle \mathbf{n}| \psi_n = \begin{cases} (-1)^i \langle \dots, n_{i+1}, n, n_i, \dots |, \\ \text{если } n_{i+1} < n < n_i \text{ для некоторого номера } i, \\ 0 \quad \text{в противном случае}; \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\langle \mathbf{n}| \psi_n^* = \begin{cases} (-1)^{i-1} \langle \dots, n_{i+1}, n_{i-1}, \dots |, \\ \text{если } n = -n_i \text{ для некоторого номера } i, \\ 0 \quad \text{в противном случае}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Дуальный вакуумный вектор $\langle \text{vac}|$ определяется диаграммой $\langle \mathbf{n}|$, где $n_j = -j + 1/2$ для $j = 1, 2, \dots, i$, и, так же как для пространства Фока, справедливы следующие утверждения:

(1) любой операторы уничтожения φ аннулирует вакуумный вектор: $\langle \text{vac}| \varphi = 0;$

(2) дуальное пространство Фока порождено дуальным вакуумным вектором:

$$\mathcal{F}^* = \langle \text{vac}| \cdot \mathcal{A} := \{a | \text{vac}\rangle : a \in \mathcal{A}\}.$$

Рассмотрим набор

$$\langle \text{vac}| \psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^* \quad \text{для } 0 < m_1 < \dots < m_r \quad \text{и } 0 < n_1 < \dots < n_s$$

как базис в \mathcal{F}^* . Будем использовать дираковские бра- и кет- обозначения $\langle u |$ для элементов пространства \mathcal{F}^* и $|u \rangle$ для \mathcal{F} , традиционные для квантовой физики. Действие $a \in \mathcal{A}$ на элементы из пространств \mathcal{F}^* и \mathcal{F} запишем как $\langle u | a$ и $a | u \rangle$. Между двумя пространствами Фока существует спаривание $\mathcal{F}^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$, обозначаемое $(\langle u |, |v \rangle) \mapsto \langle u | v \rangle$ и определяемое формулой

$$\langle n | m \rangle = \delta_{m_1+n_1,0} \delta_{m_2+n_2,0} \delta_{m_3+n_3,0} \dots, \quad (4.14)$$

где $\langle n | = \langle \dots n_3 n_2 n_1 |$ и $|m \rangle = |m_1 m_2 m_3 \dots \rangle$. Тогда выполнены следующие свойства:

$$\langle vac | vac \rangle = 1 \quad \text{и} \quad (\langle u | a) | v \rangle = \langle u | (a | v)) \quad \text{для всех } a \in \mathcal{A}. \quad (4.15)$$

Последнее выражение в дальнейшем будем писать как $\langle u | a | v \rangle$.

Т а б л и ц а 4.2
Заряды и энергии фермионов

Фермион	ψ_n	ψ_n^*
заряд	1	-1
энергия	$-n$	$-n$

Электрический заряд и энергия фермионов ψ_n и ψ_n^* определены в табл. 4.4. Зарядом и энергией монома, составленного из ψ_n и ψ_n^* , по определению следует считать сумму зарядов и энергий каждого фермиона, поэтому заряд монома (4.7) равен $r - s$, а его энергия $-(m_1 + \dots + m_r + n_1 + \dots + n_s)$.

Заряд и энергию можно определить также для базисных элементов $|u \rangle$ пространства Фока \mathcal{F} . Для этого положим

заряд (или энергия) вектора $|vac \rangle = 0$,

заряд (или энергия) вектора $a |vac \rangle = \text{заряд (или энергия) монома } a$,

где a — такой моном, составленный из фермионов, что $a |vac \rangle \neq 0$. Аналогично для дуального пространства Фока \mathcal{F}^* мы определим

заряд (или энергия) вектора $\langle vac | = 0$,

заряд (или энергия) вектора $\langle vac | a = -\text{заряду (или энергии) монома } a$

(обратите внимание на знак минус). Обозначим через $\mathcal{F}_l^{(d)}$ векторное подпространство пространства Фока, порожденное базисными векторами

с определенным зарядом l и энергией d , т. е.

$$\mathcal{F}_l^{(d)} = \text{линейная оболочка } \left\{ \psi_{m_1} \dots \psi_m, \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^* |vac\rangle : m_1 < \dots < m_r < 0, n_1 < \dots < n_s < 0, r - s = l \text{ и } -\sum m_i - \sum n_j = d \right\}.$$

Тогда пространство \mathcal{F} раскладывается в прямую сумму векторных пространств $\mathcal{F} = \bigoplus_l \mathcal{F}_l$ и $\mathcal{F}_l = \bigoplus_d \mathcal{F}_l^{(d)}$. Аналогичные утверждения справедливы для дуального пространства Фока.

Для каждого целого числа l рассмотрим диаграмму Майя, получаемую сдвигом исходной вакуумной диаграммы на l шагов направо (на $-l$ шагов налево, если $l < 0$). Обозначим через $|l\rangle = |l + 1/2, l + 3/2, l + 5/2, \dots\rangle$ соответствующий вектор пространства \mathcal{F} . Аналогичным образом определим элемент $\langle l| = \langle \dots, l - 5/2, l - 3/2, l - 1/2| \in \mathcal{F}^*$. Другими словами, векторы $|l\rangle$ и $\langle l|$ определены так:

$$\begin{aligned} \langle l| &= \begin{cases} \langle vac | \psi_{1/2} \dots \psi_{-l-1/2} & \text{для } l < 0, \\ \langle vac | & \text{для } l = 0, \\ \langle vac | \psi_{1/2}^* \dots \psi_{l-1/2}^* & \text{для } l > 0; \end{cases} \\ |l\rangle &= \begin{cases} \psi_{l+1/2}^* \dots \psi_{-1/2}^* |vac\rangle & \text{для } l < 0, \\ |vac\rangle & \text{для } l = 0, \\ \psi_{-l+1/2} \dots \psi_{-1/2} |vac\rangle & \text{для } l > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Среди векторов определенного заряда l эти векторы имеют минимальную энергию $d = l^2/2$. Заметим, что из определения следуют равенства

$$\langle l | \psi_n = 0 \text{ для } n < -l \quad \text{и} \quad \langle l | \psi_n^* = 0 \text{ для } n < l; \quad (4.16)$$

$$\psi_n |l\rangle = 0 \text{ для } n > -l \quad \text{и} \quad \psi_n^* |l\rangle = 0 \text{ для } n > l. \quad (4.17)$$

§ 4.5. Теорема Вика

Объясним, каким образом спаривание (4.14) между пространством Фока и его дуальным пространством может быть единственным способом выведенено из свойств (4.15). Для целей дальнейшего изложения определим *вакуумное среднее* элемента $a \in \mathcal{A}$ как число $\langle vac | a | vac \rangle$, которое для сокращения записи мы обозначать просто $\langle a \rangle$. Тогда из соотношений (4.15) и определения операторов рождения и уничтожения следуют такие свойства вакуумных средних:

$$\begin{cases} \langle 1 \rangle = 1, & \langle \psi_n \rangle = 0, & \langle \psi_n^* \rangle = 0, \\ \langle \psi_m \psi_n \rangle = 0, & \langle \psi_m^* \psi_n^* \rangle = 0, & \langle \psi_m \psi_n^* \rangle = \delta_{m+n,0} \theta \quad (n < 0). \end{cases} \quad (4.18)$$

В последнем выражении $\theta(P)$ есть булева характеристическая функция утверждения P , равная 1, если утверждение P справедливо, и 0 в противном случае.

Например, последнее среднее в формулах (4.18) вычисляется следующим образом. Очевидно, что правая часть отлична от нуля только в случае $n < 0 < m$. Но тогда из соотношений (4.6) следует, что левая часть равна

$$\langle \delta_{m+n,0} - \psi_n \psi_m^* \rangle = \delta_{m+n,0}(1).$$

Продолжая вычислять аналогичным образом, получим

$$\begin{aligned}\langle \psi_k \psi_m \psi_n^* \rangle &= 0, \\ \langle \psi_k \psi_l \psi_m^* \psi_n^* \rangle &= \langle \psi_k \psi_n^* \rangle \langle \psi_l \psi_m^* \rangle - \langle \psi_k \psi_m^* \rangle \langle \psi_l \psi_n^* \rangle, \\ &\dots\end{aligned}$$

Технику вычисления средних легко извлечь из разобранных примеров. Используя антисимметрические соотношения (4.6), последовательно переносим все операторы уничтожения направо, а операторы рождения налево, пока не получим нуль, встретив вакуумные векторы на концах. Однако каждый раз, когда переставляются два фермиона, из антисимметратора возникает числовое слагаемое. Складывая эти слагаемые, получаем вакуумное среднее.

Понятно, что любой моном a по фермионам ψ и ψ^* имеет вакуумное среднее $\langle a \rangle = 0$, за исключением случая, когда количество фермионов ψ и ψ^* совпадает. Следовательно, пространства \mathcal{F}_k^* и \mathcal{F}_l ортогональны, если $k \neq l$. Отметим, что пространства $\mathcal{F}_k^{*(d)}$ и $\mathcal{F}_l^{(e)}$ также ортогональны, за исключением случаев, когда $k = l$ и $d = e$.

Когда количество фермионов ψ и ψ^* совпадает, необходимо принять во внимание все комбинаторные способы их расположения. Важно только помнить об изменении знака, когда переставляются два фермиона. Обозначим через $W = (\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_n) \oplus (\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_n^*)$ набор всех возможных линейных комбинаций фермионов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 (теорема Вика). Для $w_1, \dots, w_r \in W$ справедливы равенства

$$\langle w_1, \dots, w_r \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } r \text{ нечетно,} \\ \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \langle w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \dots \langle w_{\sigma(r-1)} w_{\sigma(r)} \rangle, & \text{если } r \text{ четно,} \end{cases}$$

где $\text{sign}(\sigma)$ — знак перестановки и сумма идет по всем таким перестановкам σ , что $\sigma(1) < \sigma(2), \dots, \sigma(r-1) < \sigma(r)$ и $\sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(r-1)$, другими словами, по всем способам парного группирования элементов w_i .

Упражнения к главе 4

4.1. Рассмотрим алгебру Клиффорда, порожденную двумя элементами $\{\psi, \psi^*\}$ и соотношениями $\psi^2 = \psi^{*2} = 0$, $[\psi, \psi^*]_+ = 0$. Определим представление Фока \mathcal{F} , как в основном тексте, с таким вакуумным вектором $|\text{vac}\rangle \in \mathcal{F}$, что $\psi |\text{vac}\rangle = 0$. Докажите, что элементы $v_1 = |\text{vac}\rangle$, $v_2 = \psi^* |\text{vac}\rangle$ образуют базис пространства \mathcal{F} , в котором действие фермионов ψ и ψ^* задано матрицами

$$\psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Запишите теорему Вика для случая $n = 6$.

4.3. Докажите, что $\langle \psi_{m_1} \dots \psi_{m_s} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_t}^* \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi_{n_j}^* \rangle)$. Используя этот факт, докажите что спаривание (4.15) невырожденно на $\mathcal{F}_l^* \times \mathcal{F}_l$. Билинейная форма $F: V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ *невырождена*, если

$$F(v, w) = 0 \text{ для всех } w \in W \Rightarrow v = 0,$$

$$F(v, w) = 0 \text{ для всех } v \in V \Rightarrow w = 0.$$

ГЛАВА 5

БОЗОН-ФЕРМИОННОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Хотя описание бозонов и фермионов в предыдущей главе было представлено почти одинаковым образом, их основные свойства существенно различаются. Тем не менее, оказывается, можно выразить один тип операторов через другой. Технически это становится возможным благодаря использованию бесконечных сумм бозонных и фермионных операторов. Эти суммы являются производящими функциями, которые часто используются в квантовой теории поля.

§ 5.1. Использование производящих функций

Производящие функции являются важным средством, позволяющим проводить вычисления. Поясним это на примере. Введем переменную k и определим *фермионные производящие функции* как формальные ряды

$$\psi(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n k^{-n-1/2} \quad \text{и} \quad \psi^*(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_n^* k^{-n-1/2}. \quad (5.1)$$

В последующем мы будем сталкиваться с тождествами между формальными рядами. Равенство $\sum a_n k^n = \sum b_n k^n$ означает запись в виде одной формулы бесконечного числа равенств $a_n = b_n$.

Пример 5.1. Вычислим вакуумное среднее производящих функций (5.1). Используя соотношение (4.18), получаем

$$\langle \psi(p) \psi^*(q) \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}+1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \langle \psi_m \psi_n^* \rangle p^{-m-1/2} q^{-n-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1} q^n. \quad (5.2)$$

Окончательно это выражение может быть записано в виде

$$\langle \psi(p) \psi^*(q) \rangle = \frac{1}{p - q}. \quad (5.3)$$

Правую часть равенства (5.3) следует понимать как разложение по степеням переменных p, q при $|p| > |q|$.

Пример 5.2. Используя теорему Вика, легко получить равенство

$$\langle \psi(p_1) \dots \psi(p_n) \psi^*(q_n) \dots \psi^*(q_1) \rangle = \det(\langle \psi(p_i) \psi^*(q_j) \rangle) = \det\left(\frac{1}{p_i - q_j}\right).$$

Правая часть этого выражения, как рациональная функция, может быть записана в виде

$$\langle \psi(p_1) \dots \psi(p_n) \psi^*(q_n) \dots \psi^*(q_1) \rangle = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - p_j)(q_j - q_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - q_j)}. \quad (5.4)$$

Эту формулу следует понимать как разложение по степеням переменных p_i, q_j при $|p_1| > \dots > |p_n| > |q_n| > \dots > |q_1|$.

Замечание 5.1. Равенство детерминанта $\det\left(\frac{1}{p_i - q_j}\right)$ правой части соотношения (5.4) называется тождеством Коши. Чтобы его доказать, необходимо умножить детерминант на $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - q_j)$ и заметить, что получившийся полином имеет нули на всех диагоналях $p_i = p_j$ и $q_i = q_j$ для $i \neq j$ и поэтому делится на $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - p_j)(q_j - q_i)$. После этого для доказательства тождества достаточно сравнить старшие степени полиномов.

§ 5.2. Нормальная форма операторов

Работая с дифференциальными операторами, мы обычно пишем их в «нормальном» порядке, когда дифференцирования расположены справа, а умножения на функции слева. Если не зафиксировать какой-нибудь порядок, то такие выражения будут плохо определены, например, $(\partial/\partial x_n)x_n = x + n(\partial/\partial x_n) + 1$. Выбор упорядочения в произведениях придает смысл операторам даже тогда, когда они содержат бесконечные суммы.

Пример 5.3. Рассмотрим оператор Эйлера $\sum_{n=1}^{\infty} (nx_n \partial/\partial x_n)$, который умножает взвешенный однородный полином $f(x)$ на его вес $d = \deg_x f$. Напомним, что переменные x_n взвешены с весами $\deg x_n = n$. Этот оператор определяет вес однородного полинома. Его действие корректно определено на любом полиноме, хотя он и содержит бесконечную сумму. Если переставить порядок в произведении операторов и рассмотреть $\sum_{n=1}^{\infty} n(\partial/\partial x_n)x_n$, то такой оператор не будет иметь смысла даже при действии на постоянную функцию 1. В этом случае мы получаем $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + x_n \partial/\partial x_n) \cdot 1 = \infty$.

Введем удобное обозначение. Для любого полинома p , составленного из операторов дифференцирования и умножения, обозначение : p : вводится индуктивно по следующим правилам:

(1) : p : есть линейная функция от p и все операторы дифференцирования и умножения коммутируют внутри двоеточий;

$$(2) :1 := 1, \quad :p \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} := :p : \frac{\partial}{\partial x_n} \quad \text{и} \quad :x_n \cdot p := x_n : p :.$$

Обозначение : p : называется нормально упорядоченной формой оператора p или просто *нормальной формой* оператора p .

Пример 5.4. Например, $:x_n \frac{\partial}{\partial x_n} := : \frac{\partial}{\partial x_n} x_n := x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ и
 $:e^{x_n + \partial/\partial x_n} := e^{x_n} e^{\partial/\partial x_n}.$

Заметим, что, действуя на полиномы оператором умножения на e^{x_n} , мы выходим из кольца полиномов. Однако действие на полиномах оператора $e^{\partial/\partial x_n}$ не приводит к такому результату, так как этот оператор является оператором сдвига $f(x) \mapsto f(\dots, x_n + 1, \dots)$ и не меняет кольца полиномов.

Действуя по аналогии, введем нормальную форму для элементов алгебры Клиффорда $a \in \mathcal{A}$. Для этого будем использовать такое же обозначение :·:, как и в предыдущем случае, которое можно назвать бозонной нормальной формой. В случае необходимости различать нормальные формы операторов будем использовать нижние индексы: :·:_B для бозонной и :·:_F для фермионной нормальных форм. Последнюю определим с помощью следующих аксиом:

(1) : a : есть линейная функция элемента a , и все фермионы внутри двоеточий антисимметрически коммутируют друг с другом;

$$(2) :1 := 1, \text{ и}$$

$$\begin{aligned} :a \cdot \varphi := :a : \varphi, & \quad \text{если } \varphi \text{ — оператор уничтожения,} \\ :\varphi^* \cdot a := \varphi^* : a :, & \quad \text{если } \varphi \text{ — оператор рождения.} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Например, для квадратичных по фермионам мономов из этих аксиом следует равенство

$$:\psi_m \psi_n^* := \begin{cases} \psi_m \psi_n^*, & \text{если } m < 0 \text{ или } n > 0, \\ -\psi_n^* \psi_m, & \text{если } m > 0 \text{ или } n < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$:\psi_m \psi_n^* := \psi_m \psi_n^* - \langle \psi_m \psi_n^* \rangle.$$

Отметим, что выражения, содержащие бесконечные суммы, определены как операторы, действующие на пространстве Фока, если они записаны в нормальной форме. В следующем параграфе этой главы будут приведены примеры таких операторов.

§ 5.3. Построение бозонов из фермионов

Определим операторы H_n , где $n \in \mathbb{Z}$, при помощи следующей произвольной функции:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n k^{-n-1} = : \psi(k) \psi^*(k) :. \quad (5.6)$$

Сравнивая коэффициенты при k^n , получаем

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} : \psi_{-j} \psi_{j+n}^* :. \quad (5.7)$$

Заметим, что любой элемент $|u\rangle$ из пространства Фока получается последовательным применением фермионных операторов к вакуумному вектору $|\text{vac}\rangle$. Тогда очевидно, что $: \psi_{-j} \psi_{j+n}^* : |u\rangle = 0$ для всех значений индекса j , кроме конечного числа. Тем самым, $H_n |u\rangle$ является конечной суммой для любого вектора $|u\rangle$.

Определим коммутационные соотношения между операторами (5.7). Для этого воспользуемся следующими тождествами между коммутаторами и антисимметрическими операторами:

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B, \quad (5.8)$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (5.9)$$

Используя равенство (5.8), получим следующие коммутационные соотношения с фермионными операторами:

$$[H_n, \psi_m] = \psi_{m+n}, \quad [H_n, \psi_m^*] = -\psi_{m+n}^*. \quad (5.10)$$

Теперь, используя соотношения (5.9) и (5.10), легко получить следующие равенства:

$$[H_m, H_n] = m \delta_{m+n, 0} \quad (5.11)$$

(см. упражнение 5.1). Соотношения (5.11) похожи на бозонные коммутационные соотношения. Действительно, если для всех $n = 1, 2, \dots$ положить $a_n = H_n$ и $na_n^* = H_{-n}$, то соотношения (5.11) совпадут с каноническими коммутационными соотношениями (4.2). Итак, используя бесконечные суммы произведений фермионных операторов, мы смогли реализовать бозоны через фермионы!

Оператор H_0 отличается от всех остальных H_n , $n \neq 0$. Он единственный среди операторов (5.7), который коммутирует со всеми операторами H_n . Однако если мы положим $n = 0$ в (5.10), то увидим, что оператор H_0 измеряет заряд. Действительно, следующие утверждения равносильны:

элемент a имеет заряд, равный $l \iff [H_0, a] = la$.

§ 5.4. Изоморфизм пространств Фока

По определению оператор H_n имеет заряд 0 и энергию, равную $-n$. Заметим, что каждый оператор H_n переводит в себя подпространство $\mathcal{F}_l \subset \mathcal{F}$ с определенным значением заряда l . Сейчас мы объясним, как можно естественным образом отождествить каждое из этих подпространств \mathcal{F}_l с бозонным пространством Фока $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Для того чтобы рассматривать все заряды одновременно, введем переменную z и определим пространство

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}, x_1, x_2, x_3, \dots] = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} z^l \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]. \quad (5.12)$$

Кроме того, определим

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n H_n. \quad (5.13)$$

Заметим, что в силу соотношений (4.17) для каждого l справедливо равенство

$$H(x)|l\rangle = 0, \quad (5.14)$$

где $|l\rangle$ было определено в конце § 4.4.

Каждому элементу фермионного пространства Фока $|u\rangle \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие полином по переменным $z^{\pm 1}$ и x согласно следующему правилу:

$$\Phi(|u\rangle) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l \langle l | e^{H(x)} |u\rangle. \quad (5.15)$$

Если элемент $|u\rangle$ имеет определенный заряд m , то из бесконечной суммы по m в правой части остаётся единственное слагаемое с $l = m$. Правая часть в действительности определяет полином; мы вскоре увидим, как это применяется в конкретных примерах, но начнём со следующего утверждения.

Теорема 5.1 (изоморфизм пространств Фока). *Соответствие*

$$\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}, x_1, x_2, x_3, \dots], \quad |u\rangle \mapsto \Phi(|u\rangle), \quad (5.16)$$

является изоморфизмом векторных пространств, и

$$\Phi(H_n|u\rangle) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi(|u\rangle), & \text{если } n > 0, \\ -nx_{-n}\Phi(|u\rangle), & \text{если } n < 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что все операторы H_n при $n > 0$ коммутируют между собой и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \langle l | e^{H(x)} |u\rangle = \langle l | \frac{\partial}{\partial x_n} e^{H(x)} |u\rangle = \langle l | e^{H(x)} H_n |u\rangle,$$

что доказывает первую строчку в (5.17). Учитывая соотношения

$$\langle l | e^{H(x)} H_{-n} | u \rangle = \langle l | e^{H(x)} H_{-n} e^{-H(x)} e^{H(x)} | u \rangle \quad (5.18)$$

и $[H(x), H_{-n}] = nx_n$, получаем

$$\begin{aligned} e^{H(x)} H_{-n} e^{-H(x)} &= H_{-n} + [H(x), H_{-n}] + \frac{1}{2!} [H(x), [H(x), H_{-n}]] + \dots = \\ &= H_{-n} + nx_n. \end{aligned}$$

Однако в силу соотношений (4.16) мы получаем, что $\langle l | H_{-n} = 0$. Следовательно, правая часть равенства (5.18) может быть записана в виде

$$\langle l | (H_{-n} + nx_n) e^{H(x)} | u \rangle = nx_n \langle l | e^{H(x)} | u \rangle,$$

что доказывает вторую строчку в (5.17).

В частности, для $|u\rangle = |l\rangle$ из формулы (5.14) следует, что $\Phi(|l\rangle) = z^l$. Применяя последовательно операторы H_{-n} к этому вектору, получим, что элемент z^l , умноженный на любой моном от переменных x_n , можно представить в виде $\Phi(|u\rangle)$ для некоторого вектора $|u\rangle$. Это говорит о том, что отображение (5.17) есть сюръекция, т. е. отображение «на». Оно является также и инъекцией, т. е. отображением «в», но это следует из вычислений характеров, которые мы опускаем (см. упражнение 5.5). \square

Для того чтобы увидеть, что при отображении (5.17) устанавливается соответствие между полиномами, являющимися элементами фермионного пространства Фока, необходимо проделать предварительные вычисления. Так, из определения (5.13) и коммутационных соотношений (5.10) получаем

$$[H(x), \psi(k)] = \xi(x, k)\psi(k) \quad \text{и} \quad [H(x), \psi^*(k)] = -\xi(x, k)\psi^*(k),$$

где $\xi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n x_n$ (ср. с (2.18)). Вычисление, подобное тому, что было проделано после формулы (5.18), приводит к соотношениям

$$\begin{cases} e^{H(x)} \psi(k) e^{-H(x)} = e^{\xi(x, k)} \psi(k), \\ e^{H(x)} \psi^*(k) e^{-H(x)} = e^{-\xi(x, k)} \psi^*(k). \end{cases} \quad (5.19)$$

Определим полиномы $p_n(x)$ из следующего формального разложения экспоненты:

$$\begin{aligned} e^{\xi(x, k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) k^n = \\ &= 1 + x_1 k + \left(x_1 + \frac{x_1^2}{2} \right) k^2 + \left(x_3 + x_2 x_1 + \frac{x_1^3}{6} \right) k^3 + \dots \quad (5.20) \end{aligned}$$

Из соотношений (5.19) и (5.20) (вместе с аналогичными уравнениями в которых была произведена замена $x \mapsto -x$) следуют равенства

$$\begin{aligned} e^{H(x)} \psi_n e^{-H(x)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j} p_j(x) = \\ &= \psi_n + x_1 \psi_{n+1} + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \psi_{n+2} + \dots, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} e^{H(x)} \psi_n^* e^{-H(x)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}^* p_j(-x) = \\ &= \psi_n^* - x_1 \psi_{n+1}^* + \left(-x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \psi_{n+2}^* + \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

Тогда полиномиальные представления для $\Phi(|\mu\rangle)$ являются результатом применения этих формул.

Пример 5.5. Для вектора $\psi_{-5/2} |\text{vac}\rangle$ получим

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_{-5/2} |\text{vac}\rangle) &= z \langle 1 | e^{H(x)} \psi_{-5/2} |\text{vac}\rangle = \\ &= z \langle \text{vac} | \psi_{1/2}^* e^{H(x)} \psi_{-5/2} e^{-H(x)} |\text{vac}\rangle = z \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right), \end{aligned}$$

где в последнем равенстве было использовано соотношение (5.21).

Аналогичным образом, для вектора $\psi_{-3/2} \psi_{-3/2}^* |\text{vac}\rangle$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_{-3/2} \psi_{-3/2}^* |\text{vac}\rangle) &= \langle \text{vac} | e^{H(x)} \psi_{-3/2} e^{-H(x)} e^{H(x)} \psi_{-3/2}^* e^{-H(x)} |\text{vac}\rangle = \\ &= \langle \text{vac} | \left(\psi_{-3/2} + x_1 \psi_{-1/2} + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \psi_{1/2} + \dots \right) \times \\ &\quad \times (\psi_{-3/2}^* - x_1 \psi_{-1/2}^* + \dots) |\text{vac}\rangle = \\ &= \left(x_3 + x_2 x_1 + \frac{x_1^3}{6} \right) \cdot 1 + \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \cdot (-x_1) = x_3 - \frac{x_1^3}{3}. \end{aligned}$$

Из приведенных примеров ясно, что при описанном выше изоморфизме любой конечный вектор фермионного пространства Фока отобразится в полином.

§ 5.5. Представление фермионов через бозоны

Теорема 5.1 утверждает, что фермионное пространство Фока может быть отождествлено с бозонным пространством Фока. Таким образом, должна существовать возможность реализовать действие фермионов на первом пространстве как применение некоторых операторов на втором. Сейчас мы опишем эту конструкцию.

Введем операторы k^{H_0} и e^K на пространстве (5.12) следующими формулами:

$$(k^{H_0}f)(z, x) := f(kz, x) \quad \text{и} \quad (e^K f)(z, x) := z^k f(z, x).$$

Определим операторы

$$\begin{cases} \Psi(k) = e^{\xi(x, k)} e^{-\xi(\bar{\delta}, k^{-1})} e^K k^{H_0}, \\ \Psi^*(k) = e^{-\xi(x, k)} e^{\xi(\bar{\delta}, k^{-1})} e^{-K} k^{-H_0}, \end{cases} \quad (5.23)$$

где

$$\bar{\delta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right) \quad \text{и} \quad \xi(\bar{\delta}, k^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_n} k^{-n}.$$

Как было сказано выше, H_0 является оператором, измеряющим заряд, и, так как вектору $|l\rangle$ заряда l из фермионного пространства Фока ставится в соответствие элемент z^l , мы получаем, что $k^{H_0} z^l = k^l z^l$, и обозначение k^{H_0} естественно. Появление оператора e^K более неожиданно, но может быть мотивировано следующими аргументами. Определим $\varphi(k)$ как формальный ряд

$$\varphi(k) = \sum_{n \neq 0} \frac{H_n}{-n} k^{-n} + H_0 \ln k + K. \quad (5.24)$$

Этот ряд соответствует первообразной для производящей функции бозонов, так как он удовлетворяет соотношению $d\varphi(k)/dk = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n k^{-n-1}$. «Постоянная интегрирования» K не является корректно определенным оператором, но, для того чтобы определить коммутационные соотношения между операторами e^K и H_n , мы можем зафиксировать коммутационные соотношения¹⁾

$$[H_0, K] = 1 \quad \text{и} \quad [K, H_n] = 0 \quad \text{для} \quad n \neq 0. \quad (5.25)$$

Если, кроме того, мы считаем, что K — оператор рождения, а H_0 — оператор уничтожения, то равенства (5.23) можно просто записать в виде

$$\Psi(k) = :e^{\Phi(k)}:_B, \quad \Psi(k)^* = :e^{-\Phi(k)}:_B.$$

Теорема 5.2 (бозон-фермионное соответствие). *Производящие функции фермионов $\psi(k)$ и $\psi^*(k)$ реализуются в бозонном пространстве Фока формулами (5.23), т. е. для любого вектора $|u\rangle \in \mathcal{F}$ выполняются равенства*

$$\Phi(\psi(k)|u\rangle) = \Psi(k)\Phi(|u\rangle) \quad \text{и} \quad \Phi(\psi^*(k)|u\rangle) = \Psi^*(k)\Phi(|u\rangle).$$

1) Из определения оператора e^K очевидно, что он, действуя на элементы рассширенного пространства Фока (5.12), меняет их заряд и, следовательно, не коммутирует с оператором H_0 , который определяет заряд. Конкретный вид коммутационных соотношений (5.27) выбирается исходя из сравнения фермионного вакуумного среднего (5.3) с нормально упорядоченным произведением операторов в соотношениях (5.25). — Прим. перев.

Доказательство. Доказательства этих формул совершенно одинаковы, поэтому мы докажем утверждение только для $\psi(k)$. По определению

$$\Phi(\psi(k)|u\rangle) = \sum_l z^l \langle l| e^{H(x)} \psi(k) |u\rangle = e^{\xi(x,k)} \sum_l z^l \langle l| \psi(k) e^{H(x)} |u\rangle.$$

Оператор $e^{-\xi(\partial_x k^{-1})}$ действует как оператор сдвига: $f(x) \mapsto f(x - \epsilon(k^{-1}))$, где

$$\epsilon(k^{-1}) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \frac{1}{3k^3}, \dots \right).$$

Поэтому утверждение теоремы сводится к проверке справедливости такой леммы.

Лемма 5.3. Выполняются следующие равенства:

$$\langle l| \psi(k) = k^{l-1} \langle l-1| e^{-H(\epsilon(k^{-1}))}, \quad (5.26)$$

$$\langle l| \psi^*(k) = k^{-l-1} \langle l+1| e^{H(\epsilon(k^{-1}))}. \quad (5.27)$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $l=0$. Общая ситуация рассматривается аналогично. Чтобы доказать соотношение (5.26), достаточно проверить, что равенство

$$\begin{aligned} \langle \psi_{1/2} k^{-1} e^{-H(\epsilon(k^{-1}))} \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle = \\ = \langle \psi(k) \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle \end{aligned} \quad (5.28)$$

справедливо для любых значений n . Докажем формулу (5.28), вычислив независимо левую и правую части. Переставляя оператор $e^{-H(\epsilon(k^{-1}))}$ направо, пользуясь формулами (5.19) и заметив, что

$$e^{\pm \xi(\epsilon(k^{-1}), p)} = (1 - p/k)^{\mp 1},$$

мы можем записать левую часть равенства (5.28) в виде

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} (k - p_i)}{\prod_{j=1}^n (k - q_j)} \cdot \oint \frac{dp}{2\pi i} \langle \psi(p) \psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1}) \psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle.$$

Интеграл в последней формуле возник из представления $\psi_{1/2} = \oint \frac{dp}{2\pi i} \psi(p)$. Для вычисления среднего воспользуемся теоремой Вика (см. формулу (5.4)). После этого интеграл легко вычислить, раскладывая подынтегральное выражение в ряд по p в окрестности точки $p = \infty$. Полученный результат совпадает с правой частью равенства (5.28) в силу тождества

Коши:

$$\begin{aligned} \langle \psi(k)\psi(p_1) \cdots \psi(p_{n-1})\psi^*(q_n) \cdots \psi^*(q_1) \rangle &= \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (k - p_i)}{\prod_{j=1}^n (k - q_j)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (p_i - p_j)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}} (p_i - q_j)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i). \end{aligned}$$

Итак, лемма и, следовательно, теорема 5.2 доказаны. \square

Упражнения к главе 5

- 5.1. Докажите формулу (5.11).
- 5.2. Вычислите $\Phi(\psi_{-5/2}\psi_{-3/2}^*|vac\rangle)$.
- 5.3. Пусть x_n — переменная, взвешенная с весом n , а операторы, имеющие энергию d , обладают весом d . Убедитесь, что оператор $H(x)$, заданный формулой (5.13), однороден с весом 0. Используя это обстоятельство и то, что элемент $\langle l |$ имеет вес $l^2/2$, покажите, что полином $\Phi(|u\rangle)$, отвечающий элементу $|u\rangle \in \mathcal{F}_l^{(d)}$, имеет вес $d - l^2/2$.
- 5.4. Производящая функция размерностей векторных пространств $\mathcal{F}_l^{(d)}$, равная

$$\text{ch } \mathcal{F} := \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ d \geq l^2/2}} \dim(\mathcal{F}_l^{(d)}) z^l q^d,$$

называется *характером* пространства Фока \mathcal{F} . Используя то обстоятельство, что элементы (4.11) образуют базис в \mathcal{F} , докажите формулу

$$\text{ch } \mathcal{F} = \prod_{\substack{j > 0 \\ j \in \mathbb{Z} + 1/2}} (1 + zq^j)(1 + z^{-1}q^j).$$

- 5.5. Покажите, что, вычисляя характер бозонного пространства Фока, можно получить равенство

$$\text{ch } \mathcal{F} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l q^{l^2/2} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1}.$$

Используя это утверждение и результат упражнения 5.3, проверьте формулу (тройное тождество Якоби)

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - zq^{j-1})(1 - z^{-1}q^j)(1 - q^j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-z)^l q^{l(l-1)/2}.$$

Обратно, из предположения, что тройное тождество Якоби справедливо, следует, что отображение (5.16) является инъекцией.

ГЛАВА 6

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И τ -ФУНКЦИИ

В начале этой главы мы показываем, что линейное пространство квадратичных по фермионам мономов имеет естественную структуру бесконечномерной алгебры Ли. В оставшейся части главы будет изучаться группа, отвечающая этой алгебре. Будет показано, что эта группа есть группа преобразований уравнения КП, переводящая одно его решение в другое. На языке геометрии это означает, что группа передвигает вакуумный вектор по орбите, каждая точка которой есть некоторая τ -функция (см. гл. 2). Эта орбита есть подмногообразие в огромном бесконечномерном пространстве всех функций, и уравнения, которые определяют эту орбиту, являются уравнениями Хироты.

§ 6.1. Групповое действие и орбиты

В пространстве, в котором задано действие группы, траектория движения точки под действием этой группы образует некоторую поверхность. Очевидно, что эта поверхность будет обладать высокой степенью симметрии, просто потому, что она получена групповым действием.

Утверждение, что группа G действует на множестве S , означает, что точка $gx \in S$ определена для всех элементов группы $g \in G$ и каждой точки $x \in S$. При этом должны выполняться условия $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ и $ex = x$, где $e \in G$ есть единица в группе. Подмножество $Gx = \{gx: g \in G\} \subset S$ называется *орбитой* точки x при действии группы G на S . Центральной темой этой главы будет орбита некоторой бесконечномерной группы в некотором бесконечномерном пространстве.

Пример 6.1. Возьмем диагональную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим группу

$$G = \{g \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}): {}^t g J g = J\} \quad (6.1)$$

всех вещественных матриц размера 3×3 , сохраняющих J . Пусть \vec{x}_0 есть точка с координатами

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда что представляет собой орбита точки \vec{x}_0 при действии группы G ? Легко увидеть, что точка \vec{x}_0 принадлежит двуполостному гиперболоиду, заданному уравнением

$${}^t\vec{x}J\vec{x} \equiv x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad \text{где} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Действительно, из определения группы G следует, что для всех элементов $g \in G$ справедливы равенства

$${}^t(g\vec{x}_0)J(g\vec{x}_0) = {}^t\vec{x}_0{}^t g J g \vec{x}_0 = {}^t\vec{x}_0 J \vec{x}_0 = 1.$$

Отсюда легко увидеть, что орбита $G\vec{x}_0$ точки \vec{x}_0 есть двуполостный гиперболоид (6.2) (см. упражнение 6.1).

§ 6.2. Фермионная реализация алгебры Ли $gl(\infty)$

Обозначим буквой W набор всех линейных комбинаций фермионов. Замечательным свойством фермионных операторов является то, что антикоммутатор $[w, w']_+$ любых двух элементов $w, w' \in W$ есть комплексное число. Вычисляя коммутатор (не антикоммутатор) квадратичных по фермионам мономов, получаем

$$\begin{aligned} [w_1 w_2, w_3 w_4] &= w_1 [w_2, w_3 w_4] + [w_1, w_3 w_4] w_2 = \\ &= w_1 [w_2, w_3]_+ w_4 - w_1 w_3 [w_2, w_4]_+ + [w_1, w_3]_+ w_4 w_2 - w_3 [w_1, w_4]_+ w_2 \end{aligned}$$

и видим, что правая часть этого равенства опять квадратична по фермионам. Отсюда следует, что множество

$$W^{(2)} = \left\{ \sum_{i,j} w_i w_j : w_i \in W \right\} \subset A$$

мономов, квадратичных по фермионам, замкнуто относительно коммутатора и, тем самым, образует алгебру Ли. Заметим, что антикоммутаторы $[w, w']_+$ естественным образом задают поле комплексных чисел C в $W^{(2)}$.

Рассмотрим подалгебру в $W^{(2)}$, образованную элементами с зарядом, равным нулю. Любой такой элемент может быть единственным образом

записан в виде

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}+1/2} a_{mn} \psi_{-m} \psi_n^* + a_0, \quad \text{где } a_{mn}, a_0 \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

Проводя такие же выкладки, как и выше, легко проверить, что

$$[\psi_{-m} \psi_n^*, \psi_{-m'} \psi_{n'}^*] = \delta_{nm'} \psi_{-m} \psi_{n'}^* - \delta_{n'm} \psi_{-m'} \psi_n^*, \quad (6.4)$$

где $m, n \in \mathbb{Z} + 1/2$. Рассмотрим коммутатор элементарных матриц

$$E_{mn} = (\delta_{im} \delta_{jn})_{i,j \in \mathbb{Z}+1/2}$$

(матрица E_{mn} имеет элемент 1 на пересечении m -й строки и n -го столбца а все остальные её элементы равны 0). Из сравнения формулы (6.4) и коммутатора элементарных матриц $[E_{mn}, E_{m'n'}] = \delta_{nm'} E_{mn} - \delta_{m'n} E_{nm'}$ следует, что элементы $\psi_{-m} \psi_n^*$ имеют точно такие же коммутационные соотношения.

В главе 5 для определения бозон-фермионного соответствия рассматривались операторы H_n , которые выражались через нормально упорядоченные произведения фермионных операторов. Рассмотрение таких операторов эквивалентно наложению некоторых условий на бесконечную матрицу $A = (a_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}+1/2}$ в (6.3). Эти условия равносильны рассмотрению произведений фермионных операторов, имеющих нормальную форму:

$$X_A = \sum_{m,n} a_{mn} : \psi_{-m} \psi_n^* :. \quad (6.5)$$

Такая модификация приводит к изменению коммутационных соотношений (6.4). Предположим вначале, что сумма в формуле (6.5) конечна. Замечая, что нормальное произведение $: \psi_{-m} \psi_n^* :$ отличается от $\psi_{-m} \psi_n^*$ только на константу, получаем

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= \sum a_{ij} b_{kl} [\psi_{-i} \psi_j^*, \psi_{-k} \psi_l^*] = \sum a_{ij} b_{kl} (\delta_{jk} \psi_{-i} \psi_l^* - \delta_{li} \psi_{-k} \psi_j^*) = \\ &= \sum a_{ij} b_{ji} (: \psi_{-i} \psi_i^* : + \delta_{ii} \theta(i < 0)) - \sum b_{ki} a_{ij} (: \psi_{-k} \psi_j^* : + \delta_{kk} \theta(j < 0)) = \\ &= X_{[A,B]} + \omega(A, B), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\omega(A, B) = \sum a_{ij} b_{ji} (\theta(i < 0) - \theta(j < 0)) = -\omega(B, A) \quad (6.7)$$

и θ — булева характеристическая функция, которая была определена после соотношений (4.18). Итак, модификация формулы (6.5) приводит к появлению в формуле (6.6) слагаемого $\omega(A, B)$, не содержащего фермионных операторов. Потребуем, чтобы матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяла следующему условию:

$$\text{существует такое } N > 0, \text{ что } a_{ij} = 0 \text{ для всех } i, j, |i - j| > N. \quad (6.8)$$

Область значений индексов для ненулевых элементов матрицы A показана на рис. 6.1. Затемненные области указывают множество значений индексов в суммировании в формуле (6.7).

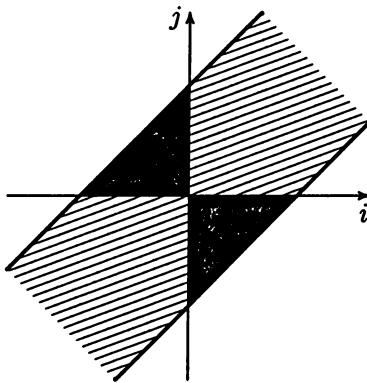


Рис. 6.1. Условие конечности (6.8)

К примеру, матричные коэффициенты оператора H_n из формулы (5.7) равны $a_{ij} = \delta_{i+n,j}$ и удовлетворяют условию (6.8). Если это условие выполнено, то даже для бесконечных матриц коммутатор и сумма в формуле (6.7) содержат конечное число слагаемых. В предположении (6.8) для любого элемента $|u\rangle$ пространства Фока можно увидеть, что $X_A |u\rangle$ содержит только конечное число членов.

Определение 6.1. Алгебра Ли $gl(\infty)$ определена как векторное пространство

$$gl(\infty) = \{X_A : \text{матрица } A \text{ удовлетворяет условию (6.8)}\} \oplus \mathbb{C}, \quad (6.9)$$

с коммутатором, определенным формулой (6.6).

Коммутатор $[-, -]$, определенный формулой (6.6), удовлетворяет тождеству Якоби, что является следствием *условия коцикличности* постоянного слагаемого $\omega(A, B)$, определенного формулой (6.7):

$$\omega(A, [B, C]) + \omega(B, [C, A]) + \omega(C, [A, B]) = 0 \quad (6.10)$$

(см. упражнение 6.2).

Заметим, что коммутатор между фермионами и элементом $X_A \in gl(\infty)$ индуцирует линейное преобразование фермионных операторов:

$$[X_A, \psi_m] = \sum_m a_{mn} \psi_{-m}, \quad [X_A, \psi_n^*] = \sum_m (-a_{mn}) \psi_m^* \quad (6.11)$$

(в силу условия (6.8) суммы в правых частях этих формул опять конечны). Матрицы преобразований для ψ и ψ^* контраградиентны друг другу

(т. е. получаются одна из другой транспонированием и умножением на -1), поэтому можно записать тождество

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} (\langle u | X_A \psi_{-n} | v \rangle \langle u' | \psi_n^* | v' \rangle + \langle u | \psi_{-n} v \rangle \langle u' | X_A \psi_n^* | v' \rangle) = \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} (\langle u | \psi_{-n} X_A | v \rangle \langle u' | \psi_n^* | v' \rangle + \langle u | \psi_{-n} v \rangle \langle u' | \psi_n^* X_A | v' \rangle) \quad (6.12) \end{aligned}$$

для любых $\langle u |, \langle u' |, |v\rangle, |v'\rangle$. Это тождество окажется впоследствии очень важным.

Элементы $gl(\infty)$ имеют заряд 0, и поэтому их действие на \mathcal{F} переводит каждое подпространство фиксированного заряда \mathcal{F}_l в себя. Другими словами, пространства \mathcal{F}_l являются пространствами представления алгебры Ли $gl(\infty)$. Воспользуемся теперь бозон-фермионным соотношением, чтобы проинтерпретировать эти представления в пространстве (полиномиальных) функций от x . Применим результат теоремы 5.2 для произведения производящих функций фермионных операторов $\psi(p)\psi^*(q)$. В равенстве

$$\Psi(p)\Psi^*(q) = E(p)E^*(q)e^K p^{H_0} e^{-K} p^{-H_0}$$

учтем, что

$$e^{-\xi(\delta, p^{-1})} e^{-\xi(x, q)} = \frac{1}{1 - q/p} e^{-\xi(x, q)} e^{-\xi(\delta, p^{-1})},$$

и, используя соотношение $p^{H_0} e^{-K} = p^{-1} e^{-K} p^{H_0}$, получим следующее выражение:

$$\Psi(p)\Psi^*(q) = \frac{1}{1 - q} e^{\xi(x, p) - \xi(x, q)} e^{-\xi(\delta, p^{-1}) + \xi(\delta, q^{-1})} p^{H_0} q^{-H_0}.$$

Ограничим действие этого оператора на подпространство с зарядом $l = 0$, можно исключить операторные сомножители $p^{H_0} q^{-H_0}$, так как они действуют в этом подпространстве тривиальным образом. Учитывая формулы (5.3) и (5.2), можно представить нормальное произведение $\langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle = \langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle - \langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle$ через вершинные операторы (3.17) для уравнения КП

$$Z(p, q) = \frac{1}{p - q} (X(p, q) - 1). \quad (6.13)$$

Суммируем наши выводы в следующей теореме.

Теорема 6.1 (представление алгебры $gl(\infty)$ вершинными операторами). Пусть операторы Z_{ij} действуют на бозонном пространстве Фока $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ и определены произвольящей функцией

$$Z(p, q) = \sum_{ij \in \mathbb{Z} + 1/2} Z_{ij} p^{-i-1/2} q^{-j-1/2}. \quad (6.14)$$

Тогда соответствие

$$\sum_{m,n} a_{mn} : \psi_m \psi_n^* : \mapsto \sum_{m,n} a_{mn} Z_{-mn}$$

определяет представление алгебры Ли $gl(\infty)$ на пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$.

§ 6.3. Группа преобразований иерархии КП

Наших знаний уже достаточно, чтобы объяснить, как можно воспользоваться бозон-фермионным соответствием, чтобы единообразно построить систему линейных уравнений, определяющих иерархию КП и τ -функции.

Определим группу G , соответствующую алгебре Ли $gl(\infty)$, как

$$G := \{e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_k} : X_i \in gl(\infty)\}. \quad (6.15)$$

Непротиворечивость определения оператора e^X требует отдельного изучения, но в данный момент мы не будем вдаваться в эти детали. Объект, который мы хотим изучить, есть орбита вакуумного вектора под действием группы G :

$$G |vac\rangle = \{g |vac\rangle : g \in G\}. \quad (6.16)$$

Используя бозон-фермионное соответствие, можно рассматривать точку орбиты (6.16) как функцию

$$\tau(x) = \tau(x; g) = \langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle. \quad (6.17)$$

Матричный элемент (6.17) называется τ -функцией. Для любого элемента $g \in G$ определим *волновую функцию* $w(x, k)$ и *дуальную волновую функцию* $w^*(x, k)$ следующим образом:

$$w(x, k) = \frac{\langle 1 | e^{H(x)} \psi(k) g | vac \rangle}{\langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle}, \quad (6.18)$$

$$w^*(x, k) = \frac{\langle -1 | e^{H(x)} \psi^*(k) g | vac \rangle}{\langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle}. \quad (6.19)$$

Учитывая соотношения (5.19), (5.26) и (5.27), приходим к выводу, что эти функции могут быть отождествлены с τ -функциями (3.21)–(3.22), построенными в гл. 3. Покажем теперь как из формул (6.17)–(6.19) можно получить билинейное тождество.

Теорема 6.2. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Res}_{k=\infty} (w^*(x, k)(x', k)) = 0 \quad \text{для всех } x, x'. \quad (6.20)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $g \in G$, то

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \langle u | g\psi_{-n} | v \rangle \langle u' | g\psi_{-n}^* | v' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \langle u | \psi_{-n} g | v \rangle \langle u' | \psi_{-n}^* g | v' \rangle.$$

Эта формула для $g = e^{X_1}$ есть следствие своего инфинитезимального варианта (6.11). Для любого n либо ψ_{-n} , либо ψ_n^* есть оператор уничтожения, поэтому, используя вышеприведенную формулу, получим

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Res}_{k=\infty} (\langle u | \psi^*(k)g | \text{vac} \rangle \langle u' | \psi(k)g | \text{vac} \rangle) = \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \langle u | \psi_n^* g | \text{vac} \rangle \langle u' | \psi_{-n} g | \text{vac} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \langle u | g\psi_n^* | \text{vac} \rangle \langle u' | g\psi_{-n} | \text{vac} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Выбирая $\langle u | = \langle 1 | e^{H(x)}$ и $\langle u' | = \langle -1 | e^{H(x')}$, получим исходную формулу. \square

Пример 6.2. Приведем пример полиномиального решения уравнения КП. Пусть a и b — константы и $X = a\psi_{-1/2}\psi_{-3/2}^* + b\psi_{-3/2}\psi_{-1/2}^*$. Соответствующий групповой элемент равен

$$g = e^X = 1 + a\psi_{-1/2}\psi_{-3/2}^* + b\psi_{-3/2}\psi_{-1/2}^* + ab\psi_{-1/2}\psi_{-3/2}^*\psi_{-3/2}\psi_{-1/2}^*.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi_{-1/2}(x)\psi_{-3/2}^*(x) \rangle &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \quad \langle \psi_{-3/2}(x)\psi_{-1/2}^*(x) \rangle = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \\ \langle \psi_{-1/2}(x)\psi_{-3/2}^*(x)\psi_{-3/2}(x)\psi_{-1/2}^*(x) \rangle &= -x_1x_3 + x_2^2 + \frac{x_1^4}{12} \end{aligned} \quad (6.21)$$

(при вычислении последнего выражения использована теорема Вика). Исходная τ -функция равна

$$\tau(x; g) = 1 + a\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right) + b\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) + ab\left(-x_1x_3 + x_2^2 + \frac{x_1^4}{12}\right).$$

Так как a и b произвольны, мы видим, например, что в пределе при $a, b \rightarrow \infty$ формула (6.21) также дает решение уравнения КП.

Как мы уже видели в конце гл. 3, из формулы (6.20) следует, что функция $w(x, k)$ должна удовлетворять серии уравнений в лаксовой форме относительно переменных x_1, x_2, x_3, \dots . Поскольку тождество (6.20) эквивалентно соотношению (3.20), из него получаем иерархию дифференциальных уравнений на τ -функцию в форме Хироты. Справедливо и обратное утверждение (см. гл. 9). Можно показать, что полином $\tau(x)$, удовлетворяющий билинейному тождеству, с необходимостью может быть записан в виде (6.17) для некоторого $g \in G$. Подводя итог, можно сказать, что τ -функции действительно являются точками орбиты вакуумного вектора $|\text{vac}\rangle$ при действии группы G . Вне зависимости от того, как записывает-

ся иерархия КП, в виде дифференциальных уравнений Хироты либо как система линейных уравнений на соответствующие волновые функции, эта иерархия есть не более чем уравнения, характеризующие орбиту. Суммируя вышесказанное, получаем

для фермионов: пространство Фока $\supset G |vac\rangle$,

для бозонов: $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots] \supset \{\tau\text{-функции}\}$.

По определению группа G естественно действует на орбитах. При построении солитонных решений вершинные операторы (6.14), введенные аксиоматически, являются квадратичными комбинациями фермионов и образующими алгебры Ли, действующей на орбите инфинитезимальными преобразованиями. Другими словами, вершинные операторы задают инфинитезимальные преобразования решений иерархии КП (или τ -функций).

Упражнения к главе 6

- 6.1. Проверьте, что формула (6.1) определяет группу G . Покажите, что орбита, проходящая через точку \vec{x}_0 , определяется формулой (6.2).
- 6.2. Проверьте условие коцикла (6.10) для любых матриц A, B, C , удовлетворяющих условию (6.8).
- 6.3. Получите равенство (6.21) и убедитесь, что прямая подстановка этого выражения в уравнение КП (3.13) дает нуль.

ГЛАВА 7

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КдФ

От иерархии КП вернемся к частному случаю иерархии КдФ. Пространство решений при этом сужается, и соответствующая группа преобразований становится меньше. Дадим краткое введение в теорию аффинной алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 , которая является алгеброй инфинитезимальных преобразований иерархии КдФ.

§ 7.1. Иерархия КдФ в сравнении с иерархией КП

Иерархии КП и КдФ были изучены в гл. 2 и 3. Сейчас сравним их свойства. Обе иерархии были сформулированы как системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и получены из условий совместности систем линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_n} = (L^n)_+ \omega, \quad L\omega = k\omega, \quad \text{где } L = \partial + f_1\partial^{-1} + f_2\partial^{-2} + \dots \quad (7.1)$$

Обе иерархии могут быть записаны в форме уравнений Хироты и имеют n -солитонные решения для любых n . Например, 2-солитонное решение задано формулой

$$\tau = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2}.$$

Более детальное сравнение этих иерархий приведено в табл. 7.1.

Иерархия КдФ может быть получена как редукция иерархии КП. Как уже объяснялось в гл. 2, условие редукции на языке псевдодифференциальных операторов выглядит следующим образом: L^2 — дифференциальный оператор. Из системы линейных уравнений (7.1) очевидно, что в таком случае коэффициенты ω_l разложения в степенной ряд (3.23) функции ω не зависят от времен с четными номерами x_2, x_4, x_6, \dots Более того, τ -функция τ определяется при помощи функций ω_l из соотношения (3.21). Следовательно, τ -функции иерархии КдФ получаются из τ -функций иерархии КП наложением условия

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_n} = 0 \quad \text{для } n = 2, 4, 6, \dots \quad (7.2)$$

Например, если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$q_j = -p_j \quad (7.3)$$

для параметров q_j, p_j в солитонных решениях иерархии КП, то времена x_2, x_4, x_6, \dots исключаются автоматически и получатся солитонные решения иерархии КdФ (см. табл. 7.1).

Так как решения иерархии КdФ оказались частным случаем решений иерархии КП, можно предположить, что группа преобразований, которая переводит решения иерархии КdФ в себя, будет подгруппой соответствующей группы иерархии КП. Сейчас мы исследуем этот вопрос.

§ 7.2. Группа преобразований уравнения КdФ

Учитывая условие (7.3) для солитонных решений, потребуем, чтобы параметры p, q в вершинных операторах (6.14) удовлетворяли соотношению $p^2 = q^2$. Для двух решений этого соотношения $q = \pm p$ получим

$$\begin{cases} Z(p, p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n p^{-n-1}, \\ Z(p, -p) = \frac{1}{2p} \left(\exp \left(\sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ нечетно}}} 2x_n p^n \right) \exp \left(- \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ нечетно}}} \frac{2}{n} \frac{\partial}{\partial x_n} p^{-n} \right) - 1 \right). \end{cases} \quad (7.4)$$

Первый оператор есть в точности производящая функция бозонов, тогда как второй совпадает с вершинным оператором для уравнения КdФ, введенным в гл. 2. Кроме бозонов, пропорциональных переменным x_n с четными номерами n , эти операторы первого типа сохраняют условие (7.2) и, следовательно, обеспечивают инфинитезимальные преобразования иерархии КdФ. Какую же алгебру образуют эти преобразования?

Чтобы переформулировать условие (7.4) на фермионном языке, ограничим произвольные квадратичные комбинации фермионов элементами вида

$$:\psi(p)\psi^*(p): \quad \text{и} \quad :\psi(p)\psi^*(-p):. \quad (7.5)$$

Легко увидеть, что это условие эквивалентно следующему. Вместо линейных комбинаций общего положения $X_A = \sum a_{mn} :\psi_{-n}\psi_m^*:$ необходимо рассмотреть комбинации, которые инвариантны относительно сдвигов индексов:

$$\psi_n \rightarrow \psi_{n-2}, \quad \psi_n^* \rightarrow \psi_{n+2}^*.$$

Это эквивалентно следующему условию на элементы матрицы A :

$$a_{mn} = a_{m+2,n+2} \quad \text{для всех } m, n. \quad (7.6)$$

Понятно, что бесконечная матрица $A = (a_{mn})$, удовлетворяющая условию (7.6), определяется своими элементами a_{mn} с индексами $m = \pm 1/2$

Таблица 7.1. Иерархия КdФ в сравнении с иерархией КП

	Иерархия КП	Иерархия КdФ
Временные переменные	x_1, x_2, x_3, \dots	x_1, x_3, x_5, \dots
Псевдодифференциальный оператор	$L = \partial + f_1 \partial^{-1} + f_2 \partial^{-2} + \dots$	$L = (\partial^2 + u)^{1/2}$
Нелинейное уравнение	$\frac{3\partial^2 u}{4\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)$... $(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3)\tau \cdot \tau = 0$...	$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$... $(D_1^4 - 4D_1 D_3)\tau \cdot \tau = 0$...
Уравнение Хироты		
Солитоны		$\xi_j = 2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} p_j^n x_n$ $c_{ij} = \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{\left(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j}\right)^2}$

и $n \in \mathbb{Z} + 1/2$. Удобно выразить ее как лорановский полином по одной переменной t (или как полином по переменным t, t^{-1}) следующего вида:

$$A(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a_{-1/2,-1/2+j} & a_{-1/2,1/2+j} \\ a_{1/2,-1/2+j} & a_{1/2,1/2+j} \end{pmatrix} t^j.$$

С учетом этих обозначений формула (6.7) может быть переписана в виде

$$\omega(A, B) = \operatorname{Res}_{t=0} \left(\operatorname{Tr} \left(\frac{dA}{dt}(t) B(t) \right) \right) \quad (7.7)$$

(см. упражнение 7.1). Алгебра Ли, возникающая таким образом, называется аффинной алгеброй Ли¹⁾ $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$.

Определение 7.1 (аффинная алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$). Рассмотрим пространство, порожденное матрицами, элементы которых являются лорановскими полиномами по t , и элементом c :

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & -\alpha(t) \end{pmatrix} : \alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] \right\} \oplus \mathbb{C}c.$$

Это пространство имеет структуру алгебры Ли с коммутатором:

$$[A(t), B(t)] = [A(t), B(t)]_{\text{мат}} + \operatorname{Res}_{t=0} \left(\operatorname{Tr} \left(\frac{dA}{dt}(t) B(t) \right) \right) \cdot c,$$

$$[c, X \otimes A(t)] = 0 \quad \text{для всех } X.$$

Элемент c коммутирует со всем элементами алгебры, т. е. является центральным элементом. Индекс «мат» означает коммутатор матриц. Эта алгебра называется *аффинной алгеброй Ли* $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$.

Подведем итог. Пусть $\mathcal{B}^{(2)}$ — алгебра Гейзенберга, порожденная переменными с нечетными номерами $x_n, \partial/\partial x_n$ (для $n = 1, 3, 5, \dots$). Действие алгебры $\mathcal{B}^{(2)}$ на вакуумный вектор $|1\rangle \in \mathbb{C}[x]$ порождает подпространство

$$\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots],$$

которое можно интерпретировать как орбиту этого действия. Вершинные операторы (7.4) действуют на этом пространстве. Таким образом, алгебра $\mathcal{B}^{(2)}$ и операторы (7.4) образуют представление аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. В этом представлении центральный элемент c действует умножением на 1. В общем случае, если элемент c действует как умножение на скаляр k , будем говорить, что представление имеет *уровень* k . Инфинитезимальные преобразования, которые переводят решения КdФ в себя, образуют аффинную алгебру Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ (точнее, ее представление уровня 1). Точки орбиты

¹⁾ Ограничение (7.6) фиксирует алгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, которая имеет подалгебру бесследовых матриц, описанную в определении 7.1. — Прим. перев.

вакуумного вектора при действии $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, т. е. τ -функции, дают решения уравнения КdФ в форме Хироты.

Замечание 7.1. Вместо редукции, рассмотренной в этом параграфе, можно точно так же рассмотреть редукцию $p^\ell = q^\ell$ для произвольного натурального числа ℓ . Получим другую серию солитонных уравнений. Соответствующие инфинитезимальные преобразования образуют серию алгебр Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell$. Афинные алгебры Ли являются примерами бесконечномерных алгебр Ли, которые часто используются в приложениях.

Упражнения к главе 7

7.1 Проверьте справедливость формулы (7.7).

ГЛАВА 8

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ И СООТНОШЕНИЯ ПЛЮККЕРА

Эта глава посвящена введению в теорию многообразий Грассмана. Связь между этим классическим понятием проективной геометрии и материалом данной книги основана на соотношениях Плюккера. Эти соотношения будут объяснены для случая конечномерных векторных пространств как введение в материал, изложенный в следующих главах.

§ 8.1. Конечномерные грассманианы

Область математики, о которой пойдет речь далее, возникла как развитие проективной геометрии, а также может восприниматься как дополнение к стандартному курсу линейной алгебры. Метод подачи материала, которому мы будем придерживаться, не должен показаться современному читателю выпадающим из контекста книги, тогда как у читателя XIX в. вызвал бы существенное концептуальное сопротивление. Материал, к изложению которого мы приступаем, тесно связан с так называемой *линейной геометрией*, которая была областью исключительно плодотворных исследований в математике XIX в. и оказала влияние на современные исследования.

Пусть V — n -мерное векторное пространство. Для любого такого m , что $0 \leq m \leq N$, обозначим через $\text{Gr}(m, V)$ или $\text{Gr}(m, N)$ набор всех m -мерных подпространств в V . Существуют различные наборы этих множеств в зависимости от выбора V , N и m , но все они будут называться *многообразиями Грассмана* или *грассманианами*.

В случае $m = 0$ существует только одно 0-мерное подпространство $\{0\}$ в любом векторном пространстве V , поэтому грассманиан $\text{Gr}(0, V)$ содержит всего одну точку $\{0\}$. Теперь рассмотрим $m = 1$. Тогда грассманиан $\text{Gr}(1, V)$ есть набор одномерных векторных подпространств в V . Другими словами, элемент грассманиана $\text{Gr}(1, V)$ определяется ненулевым вектором $v \in V$, и два вектора v , v' задают одну и ту же точку грассманиана $\text{Gr}(1, V)$ тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, т. е. один вектор равен другому, умноженному на некоторое ненулевое число. Грассманиан $\text{Gr}(1, V)$

обычно называют *комплексным проективным пространством* и обозначают $\mathbb{P}(V)$ или $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C})$ (будем рассматривать коэффициенты из поля комплексных чисел \mathbb{C}).

Рассмотрим, например, $N = 2$. В этом случае пространство $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ одномерно и называется *комплексной проективной прямой*. Точка в $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ определяется вектором $v = (v_1, v_2)$ с координатами $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Векторы, для которых $v_2 = 0$ задают точку в $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Такие векторы образуют целую линию, но в соответствии с определением проективного пространства все они определяют одну и ту же точку, называемую *бесконечной точкой* в $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Векторам v , для которых $v_2 \neq 0$ поставим в соответствие число v_1/v_2 . В результате мы получим взаимно однозначное соответствие между точками пространства $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ за исключением бесконечной точки и точками комплексной плоскости. Если удалить одну точку из двумерной сферы, то последняя превратится в плоскость (представьте себе сферу, сделанную из бесконечно растягиваемой резиновой пленки; см. упражнение 8.1).

Пространство $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ может быть отождествлено с двумерной сферой. Более аккуратное рассмотрение позволяет доказать, что пространство $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ гомеоморфно двумерной сфере и даже изоморфно ей как комплексное многообразие. Аналогично можно догадаться, что пространство $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C})$ содержит копию пространства \mathbb{C}^{N-1} , хотя теперь фактор $\mathbb{P}_{N-1}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^{N-1}$ содержит более чем одну точку.

Проективное пространство $\mathbb{P}(V)$ и грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ имеют, вообще говоря, структуру алгебраических многообразий. Хорошим введением в теорию алгебраических многообразий является глава I в монографии И. Р. Шафаревича¹⁾. А сейчас мы сделаем полезное упражнение, которое может дать представление об этом предмете, а именно вычислим размерность грассманиана. Размерность многообразия совпадает с числом непрерывных параметров необходимых для определения точки этого многообразия; грубо говоря, представление о размерности можно получить по аналогии с размерностью векторного пространства, или можно вспомнить несколько примеров, таких как сферы (хотя здесь мы, как правило, имеем в виду размерность над \mathbb{C}). В случае проективного пространства точка в $\mathbb{P}(V)$ задается фиксацией ненулевого вектора с точностью до умножения на число, следовательно, $\dim \mathbb{P}(V) = N - 1$.

Обобщим это рассуждение на случай произвольной размерности m . Для этого рассмотрим базис в V как набор N линейно независимых векторов (v_1, \dots, v_N) . Таким образом, элемент в пространстве V задается строчкой векторов длины N . Ясно, что m -мерное векторное подпространство $W \subset V$ определено при помощи m линейно независимых вектор-

¹⁾ И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2005 г.

ров (w_1, \dots, w_m) . Пусть

$$w_i = \sum_{j=1}^N v_{ij} v_j. \quad (8.1)$$

Другими словами, мы задаем m -мерное векторное подпространство $W \subset V$ матрицей $M = (v_{ij})$ размера $m \times N$ и ранга m . Матрица $M = M_W$ называется *остовом* пространства W . Однако при определении подпространства W с помощью матриц остова мы получаем избыточную информацию. Действительно, два остова M_1 и M_2 определяют одно и то же подпространство W тогда и только тогда, когда $M_2 = gM_1$, где $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Для вычисления размерности грассmanniana $\mathrm{Gr}(m, V)$ достаточно перенумеровать базис в V таким образом, чтобы матрица M приняла вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $m(N - m)$ матричных элементов блока справа произвольны. Следовательно, размерность грассmanniana $\mathrm{Gr}(m, V)$ равна $m(N - m)$.

Существует другой способ вычисления этой размерности. Выберем базис в W и расширим его до базиса в V . Свобода в выборе базиса в V определяется группой преобразований $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Однако среди матриц этих преобразований есть те, которые оставляют подпространство W (как множество) неизменным, и они имеют вид

$$m \left\{ \begin{pmatrix} m & & N-m \\ * & & * \\ \hline 0 & & * \end{pmatrix} \right. \begin{array}{l} \overbrace{\hspace{1cm}} \\ \overbrace{\hspace{1cm}} \end{array} \left. \begin{array}{l} \overbrace{\hspace{1cm}} \\ \overbrace{\hspace{1cm}} \end{array} \right\} N-m$$

Множество матриц такого вида является подгруппой в $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ и называется *параболической подгруппой*. Из этого следует, что пространство $\mathrm{Gr}(m, V)$ имеет

$$N^2 - m^2 - (N - m)^2 - m(N - m) = m(N - m)$$

степеней свободы, т. е. его размерность равна $m(N - m)$.

Следующим нетривиальным примером грассmanniana после проективного пространства является случай, когда $N = 4$ и $m = 2$. Это многообразие $\mathrm{Gr}(2, 4)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$. Это об-

стоятельство было открыто Плюккером и подробно изучено Клейном и др. (см. упражнение 8.1).

§ 8.2. Координаты Плюккера

Как было отмечено в предыдущем параграфе, грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ имеет структуру алгебраического многообразия. Смысл этого названия состоит в том, что точки грассманиана $\text{Gr}(m, V)$ имеют координаты, являющиеся решениями системы алгебраических уравнений, и что все эти решения соответствуют точкам в $\text{Gr}(m, V)$. К примеру, окружность есть алгебраическое многообразие: точка на плоскости имеет две координаты (x, y) , и окружность — это множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{для некоторого фиксированного } r > 0.$$

Если рассматривать алгебраическое многообразие в этом простом смысле, то мы должны, во-первых, указать пространство, в котором содержится наше многообразие, и, во-вторых, указать, каким способом оно в него вкладывается. Существует множество способов вложения. Например, когда мы рассматриваем окружность, то часто не очень интересуемся, в каком пространстве она лежит. Хотя мы не будем вдаваться во все эти тонкости, нас будут интересовать пространства, в которые вложены грассманианы.

Начнем опять со случая $m = 1$. Как уже было отмечено, точка грассманиана $\text{Gr}(1, V) = \mathbb{P}(V)$ задается одномерным векторным подпространством в V , которое натянуто на ненулевой вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in V$. Будем считать компоненты вектора $v \in V$ координатами точки в $\mathbb{P}(V)$. Эти координаты называются *однородными координатами* пространства $\mathbb{P}(V)$ и не должны одновременно быть равными нулю:

$$(v_1, \dots, v_N) \neq (0, \dots, 0).$$

Между однородными координатами и точками в $\mathbb{P}(V)$ нет взаимно однозначного соответствия. Заметим, что необходимым и достаточным условием того, что два набора координат (v_1, v_2, \dots, v_N) и $(v'_1, v'_2, \dots, v'_N)$ задают одну и ту же точку, является существование такого ненулевого числа c , что $v'_i = cv_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Таким образом, мы будем представлять себе пространство $\mathbb{P}(V)$ как пространство, состоящее из точек с координатами такого вида.

Для произвольного m в качестве пространства, в котором содержится грассманиан $\text{Gr}(m, V)$, обычно берут некоторое проективное пространство достаточно большой размерности. Объясним, как это можно сделать. Каждая точка $W \in \text{Gr}(m, V)$ в грассманиане есть m -мерное векторное под-

пространство $W \subset V$, соответствующее матрице $M_W = (v_{ij})$ с m строчками и N столбцами. Рассмотрим все миноры размера $m \times m$ в матрице M :

$$v_\alpha = \det(v_{i,\alpha_j})_{1 \leq i,j \leq m},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq N$. Количество этих миноров, очевидно, равно $\binom{N}{m}$. Изменение базиса в M приводит к умножению матрицы M слева на невырожденную матрицу h размера $m \times m$ из группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Следствием такого преобразования будет одновременное умножение всех миноров v_α на число $\det h$ (см. упражнение 8.2).

Так как существует $\binom{N}{m}$ различных способов выбора миноров размера $m \times m$ из матрицы M , миноры v_α могут быть взяты как однородные координаты проективного пространства размерности $\binom{N}{m-1}$. Можно показать, что различным точкам $W, W' \in \mathrm{Gr}(m, V)$ будут соответствовать различные наборы $(v_\alpha), (v'_\alpha)$. Эти координаты (v_α) называются *координатами Плюккера* точки $W \in \mathrm{Gr}(m, V)$.

Существует альтернативный способ введения координат Плюккера. Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием тензорного произведения векторных пространств, в противном случае ему следует обратиться к подходящему учебнику²⁾. Рассмотрим m -кратное внешнее произведение $\bigwedge^m V$ пространства V . Необходимое и достаточное условием того, что m векторов $w_1, \dots, w_m \in V$ линейно независимы, состоит в том, что $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \neq 0 \in \bigwedge^m V$. Если $W \subset V$ есть m -мерное векторное подпространство, то набор w_1, \dots, w_m будет базисом в нем. Из того, что $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \neq 0$, следует, что подпространство W соответствует ненулевому вектору в $\bigwedge^m V$. Однако это соответствие зависит от выбора базиса. Пусть w'_1, \dots, w'_m — другой базис в h — матрица, которая связывает эти базисы:

$$w'_i = \sum_{j=1}^m h_{ji} w_j,$$

тогда

$$w'_1 \wedge \dots \wedge w'_m = \det(h) w_1 \wedge \dots \wedge w_m$$

(см. упражнение 8.2). Изменение базиса в W приводит к умножению вектора на скаляр. Тем самым, мы видим, что существует корректно определенное отображение $\mathrm{Grass}(m, V) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$, называемое *вложением Плюккера*. Соотношение между координатами Плюккера и системой обозначений (8.1) задается равенством

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_m} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v_{\alpha_m}.$$

²⁾ См., например, Ленг С. Алгебра. Гл. XVI. — М.: Мир, 1968.

С этой точки зрения не очень удобно считать, что индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ координат Плюккера упорядочены, т. е. $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$. Более естественно полагать, что координаты Плюккера кососимметричны по индексам. Этому соглашению мы будем придерживаться в последующем изложении.

§ 8.3. Соотношения Плюккера

Итак, координаты Плюккера $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})$ точки в $\text{Gr}(m, V)$ кососимметричны по индексам. Однако не каждый набор из $\binom{N}{m}$ координат, который меняет знак при перестановке индексов, есть образ некоторого элемента в $\text{Gr}(m, V)$.

Легко увидеть, что между координатами Плюккера для всех точек грассmannиана $\text{Gr}(m, V)$ нет линейных соотношений (см. упражнение 8.4). Однако между ними есть квадратичные соотношения следующего вида.

Теорема 8.1. *Пусть $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \leq N$ и $1 \leq \beta_1, \dots, \beta_{m+1} \leq N$ — два набора попарно различных индексов. Тогда выполнено следующее квадратичное соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_i} v_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{m+1}} = 0. \quad (8.2)$$

Соотношения Плюккера часто записывают в виде

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\beta_1, \dots, \beta_m} = \sum_{i=1}^m v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_i, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_m} v_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \alpha_s, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m} \quad (8.3)$$

для любого s . Формула (8.3) может быть получена из (8.2) перенумерацией индексов.

Доказательство. Распишем левую часть формулы (8.2) более подробно:

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} v_{1\alpha_1} & \dots & v_{1\alpha_{m-1}} & v_{1\beta_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\alpha_1} & \dots & v_{m\alpha_{m-1}} & v_{m\beta_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \dots & v_{1\beta_{i-1}} & v_{1\beta_{i+1}} & \dots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\beta_1} & \dots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_{i+1}} & \dots & v_{m\beta_{m+1}} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая первый определитель по последнему столбцу, получим

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} v_{j\beta_i} \bar{v}_j \cdot \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \dots & v_{1\beta_{i-1}} & v_{1\beta_{i+1}} & \dots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\beta_1} & \dots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_{i+1}} & \dots & v_{m\beta_{m+1}} \end{vmatrix},$$

где

$$\bar{v}_j = \begin{vmatrix} v_{1\alpha_1} & \dots & v_{1\alpha_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{j-1\alpha_1} & \dots & v_{j-1\alpha_{m-1}} \\ v_{j+1\alpha_1} & \dots & v_{j+1\alpha_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{m\alpha_1} & \dots & v_{m\alpha_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Сумму по i в рассматриваемой формуле можно представить как разложение по строке следующих определителей:

$$\sum_{j=1}^m (-1)^j \bar{v}_j \cdot \begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \dots & v_{1\beta_{i-1}} & u_{1\beta_i} & v_{1\beta_{i+1}} & \dots & v_{1\beta_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\beta_1} & \dots & v_{m\beta_{i-1}} & v_{m\beta_i} & v_{m\beta_{i+1}} & \dots & v_{m\beta_{m+1}} \\ v_{j\beta_1} & \dots & v_{j\beta_{i-1}} & v_{j\beta_i} & v_{j\beta_{i+1}} & \dots & v_{j\beta_{m+1}} \end{vmatrix}.$$

Но все эти определители содержат повторяющиеся строки и, значит, равны нулю. \square

Это соотношение может быть также доказано с использованием разложения Лапласа определителя размера $2m \times 2m$ (см. упражнение 8.5).

Пример 8.1. Запишем соотношения Плюккера явно в случае $N = 4$ и $m = 2$. Как уже упоминалось, после проективного пространства это первый нетривиальный пример грассманниана. В этом случае линейно независимыми координатами будут

$$v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}, v_{34},$$

и, выбирая $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ в формуле (8.2), мы получим

$$v_{12}v_{34} - v_{13}v_{24} + v_{14}v_{23} = 0.$$

Утверждение, обратное теореме 8.1, тоже справедливо.

Теорема 8.2. Любой ненулевой набор чисел $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})$, кососимметричный по перестановке индексов и удовлетворяющий соотношениям Плюккера (8.2), является координатой Плюккера точки грассманниана $\text{Gr}(m, V)$, т. е. m -мерного векторного подпространства в V .

Доказательство. По предположению $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})$ есть ненулевой вектор. Предположим, что $v_{1\dots m} \neq 0$ (всегда можем ограничиться этим случаем, перенумеровав базис в V , если необходимо). Домножая вектор на константу, всегда можно добиться, чтобы выполнялось равенство

$$v_{1\dots m} = 1.$$

Такая нормировка будет предполагаться в последующем. Пусть

$$w_{ij} = v_{1\dots i-1, j, i+1\dots m} \quad \text{для } i = 1, \dots, m \quad \text{и } j = 1, \dots, N.$$

Тогда по построению

$$w_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{для } j \leq m. \quad (8.4)$$

Это определяет m векторов $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{iN})$, $i = 1, \dots, m$, на которые натягивается m -мерное векторное подпространство $W \subset V$. Обозначим

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{1\alpha_1} & \dots & w_{1\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m\alpha_1} & \dots & w_{m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Нужно доказать, что

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \quad \text{для всех } \alpha_1, \dots, \alpha_m. \quad (8.5)$$

Возьмем набор $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ попарно различных индексов. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ — индексы среди $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, которые больше чем m , и β_1, \dots, β_s — индексы из набора $1, \dots, m$, которые отсутствуют в списке $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Упорядочим элементы в списке $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ следующим образом:

$$1, \dots, \beta_1 - 1, \gamma_1, \beta_1 + 1, \dots, \beta_s - 1, \gamma_s, \beta_s + 1, \dots, m.$$

Так как соотношение (8.4) выполнено по предположению, раскладывая определитель размера $m \times m$ для $w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ по $m - s$ столбцам, не содержащим γ_i , получаем

$$w_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & w_{\beta_1 \gamma_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_s \gamma_1} & \dots & w_{\beta_s \gamma_s} \end{vmatrix}.$$

Докажем равенство (8.5) индукцией по s . Это соотношение очевидно для $s = 0$ или 1. Предположим, что оно выполнено для $s < t$. Из соотношений Плюккера (8.3) имеем

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{1, \dots, m} = \sum_{i=1}^m v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, i, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} v_{1, \dots, i-1, \alpha_r, i+1, \dots, m},$$

где число r произвольно. Выберем значение r , для которого $\alpha_r = \gamma_t$. Тогда для $i \neq \beta_1, \dots, \beta_t$ получим, что

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, i, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = 0.$$

Действительно, числа от 1 до m , не входящие в набор $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, — это в точности β_1, \dots, β_t . Когда $i = \beta_j$, среди индексов вектора $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m}$ есть номер, пропущенный в наборе от 1 до m , который равен $t - 1$. По предположению индукции

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{1\alpha_1} & \dots & w_{1\alpha_{r-1}} & w_{1\beta_j} & w_{1\alpha_{r+1}} & \dots & w_{1\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m\alpha_1} & \dots & w_{m\alpha_{r-1}} & w_{m\beta_j} & w_{m\alpha_{r+1}} & \dots & w_{m\alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Используя последовательно эти рассуждения, указанный определитель можно записать как

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} \cdot \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & w_{\beta_1 \gamma_{l-1}} & w_{\beta_1 \beta_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j-1} \gamma_{l-1}} & w_{\beta_{j-1} \beta_j} \\ w_{\beta_j \gamma_1} & \dots & w_{\beta_j \gamma_{l-1}} & w_{\beta_j \beta_j} \\ w_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j+1} \gamma_{l-1}} & w_{\beta_{j+1} \beta_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_l \gamma_1} & \dots & w_{\beta_l \gamma_{l-1}} & w_{\beta_l \beta_j} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая его по последнему столбцу и используя тот факт, что $w_{\beta_k \beta_l} = \delta_{kl}$, получаем

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_j, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m} = (-1)^{l+j} \cdot \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & w_{\beta_1 \gamma_{l-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j-1} \gamma_{l-1}} \\ w_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j+1} \gamma_{l-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_l \gamma_1} & \dots & w_{\beta_l \gamma_{l-1}} \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся нормировкой $v_{1, \dots, m} = 1$ и положим $i = \beta_j$, $\alpha_r = \gamma_l$. Поскольку $v_{1, \dots, i-1, \gamma_l, i+1, \dots, m} = w_{\beta_l \gamma_l}$, соотношения Плюккера (8.3) превращаются в равенства

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \sum_{j=1}^l (-1)^{l+j} w_{\beta_j \gamma_l} \cdot \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & w_{\beta_1 \gamma_{l-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_{j-1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j-1} \gamma_{l-1}} \\ w_{\beta_{j+1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{j+1} \gamma_{l-1}} \\ w_{\beta_l \gamma_1} & \dots & w_{\beta_l \gamma_{l-1}} \end{vmatrix}.$$

Собирая эту сумму в определитель, получаем

$$v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \begin{vmatrix} w_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & w_{\beta_1 \gamma_{l-1}} & w_{\beta_1 \gamma_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{\beta_{l-1} \gamma_1} & \dots & w_{\beta_{l-1} \gamma_{l-1}} & w_{\beta_{l-1} \gamma_l} \\ w_{\beta_l \gamma_1} & \dots & w_{\beta_l \gamma_{l-1}} & w_{\beta_l \gamma_l} \end{vmatrix},$$

что доказывает утверждение. \square

Можно также доказать, что квадратичные соотношения обеспечивают все соотношения, определяющие гравсманианы, или, другими словами, все соотношения более высокой степени могут быть получены как следствия квадратичных соотношений Плюккера.

Упражнения к главе 8

8.1. Постройте взаимно однозначное соответствие между двумерной сферой без одной точки и точками плоскости.

8.2. Пусть W — m -мерное подпространство в V и M — остав подпространства W . Докажите, что если $h \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, то координаты Плюккера для остава hM равны координатам Плюккера для M , умноженным на $\det(h)$.

8.3. Докажите, что различные точки грассамиана $\mathrm{Gr}(m, V)$ имеют различные координаты Плюккера.

8.4. Докажите, что координаты Плюккера не удовлетворяют никаким линейным соотношениям.

8.5. Приведите альтернативное доказательство соотношений Плюккера с помощью разложения Лапласа.

ГЛАВА 9

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ

В главе 6 было показано, что пространство всех τ -функций для иерархии КП образует орбиту вакуумного вектора при групповом действии. В этой главе будет показано, что эта орбита является грассманианом, и будут рассмотрены определяющие этот грассманиан уравнения, т. е. билинейное тождество. В процессе изложения будут обсуждаться группа Клиффорда и характеристические полиномы.

§ 9.1. Случай конечномерного пространства Фока

В предыдущей главе был определен конечномерный грассманиан и для него было введено понятие координат Плюккера и соотношений Плюккера, которые выполняются между ними. В этой главе будет рассмотрена соответствующая теория в рамках пространств Фока, т. е. будет изучен вопрос описания множества векторных подпространств фиксированной размерности в бесконечномерном векторном пространстве. Чтобы связать эту теорию с материалом предыдущей главы, начнем рассмотрение с конечномерной алгебры Клиффорда и соответствующего конечномерного пространства Фока.

Пусть N — некоторое натуральное число. В этом параграфе будут использоваться фермионы с индексами, не превосходящими N по абсолютной величине: $|i| < N$. Предположим, что фермионы ψ_i, ψ_i^* удовлетворяют каноническим антисимметрическим соотношениям (4.6), и пусть \mathcal{A}_N — конечномерная алгебра Клиффорда, которую они порождают. Обозначим через V_N и V_N^* векторные пространства, натянутые на фермионы ψ_i и ψ_i^* соответственно:

$$V_N = \bigoplus_{|i| < N} \mathbb{C}\psi_i, \quad V_N^* = \bigoplus_{|i| < N} \mathbb{C}\psi_i^*.$$

Положим

$$W_N = V_N \oplus V_N^*.$$

Пусть \mathcal{F}_N — конечномерное фермионное пространство Фока, определенное так же, как и в гл. 4. Вакуумный вектор, заряд и энергия определены аналогичным образом.

Если g — обратимый элемент из \mathcal{A}_N , то определим T_g при помощи соотношения

$$T_g(a) = gag^{-1} \quad \text{для } a \in \mathcal{A}_N.$$

Заметим, что \mathcal{A}_N содержит и необратимые элементы, например, $\psi_{1/2}$. Очевидно, что T_g есть автоморфизм алгебры \mathcal{A}_N и выполнены следующие соотношения:

$$T_{gg'} = T_g T_{g'}, \quad T_{g^{-1}} = T_g^{-1} \quad \text{и} \quad T_c = 1 \quad \text{для } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (9.1)$$

Из этого следует, что множество

$$G(W_N) = \{g \in \mathcal{A}_N : \text{существует обратный элемент } g^{-1} \text{ и } T_g(w) \in W_N \text{ для всех } w \in W_N\},$$

образует группу, называемую *группой Клиффорда*.

Отображение, переводящее пару элементов $w, w' \in W_N$ в их антисимметрический коммутатор $\langle w, w' \rangle = [w, w']_+ \in \mathbb{C}$, является невырожденной симметрической билинейной формой на W_N . Пусть

$$O(W_N) = \{T \in \mathrm{GL}(W_N) : \langle T(w), T(w') \rangle = \langle w, w' \rangle \text{ для всех } w, w' \in W_N\}.$$

Это ортогональная группа, соответствующая форме $\langle -, - \rangle$. По определению группы Клиффорда элемент $g \in G(W_N)$ задает элемент $T_g \in O(W_N)$.

Теорема 9.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *любой элемент $T \in O(W_N)$ представим в виде $T = T_g$ для некоторого $g \in G(W_N)$;*

(ii) *$T_g = T_{g'}$ тогда и только тогда, когда $g = cg'$ для $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Утверждение (i) может быть доказано исходя из того соображения, что группа $O(W_N)$ состоит из отражений, но мы опустим это доказательство. Учитывая соотношения (9.1), для доказательства утверждения (ii) достаточно рассмотреть случай $g' = 1$. Тогда $T_g = 1$ и элемент g коммутирует со всеми элементами из \mathcal{A}_N , т. е. g лежит в центре алгебры \mathcal{A}_N . Однако известно, что центр алгебры \mathcal{A}_N совпадает с \mathbb{C} (см. упражнение 9.1).

Приведем без доказательства формулу, которая позволяет восстановить g с точностью до скалярного множителя, если задан элемент $T_g \in O(W_N)$. (См., например, работы М. Сато и др. 1978–1980 гг.) Для упроще-

шения обозначений введем величину

$$w_i = \begin{cases} \psi_{i-1/2} & \text{для } i = 1, \dots, N, \\ \psi_{-N-1/2}^* & \text{для } i = N+1, \dots, 2N, \\ \psi_{2N+1/2-i}^* & \text{для } i = 2N+1, \dots, 3N, \\ \psi_{3N+1/2-i} & \text{для } i = 3N+1, \dots, 4N \end{cases}$$

и следующие матрицы размера $4N \times 4N$:

$$E_- = \begin{pmatrix} I_{2N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{2N} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_{2N} \\ I_{2N} & 0 \end{pmatrix},$$

где I_{2N} — единичная матрица размера $2N \times 2N$.

Пусть задан элемент $T \in O(W_N)$, и пусть матрица $E_+ + E_- T$ невырождена. Определим

$$R = (R_{ij}) = (T - I)(E_+ + E_- T)^{-1}J$$

и построим элемент $g \in G(W_N)$ по правилу

$$g = \langle g \rangle : e^\rho :, \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{4N} R_{ij} w_i w_j.$$

Этот элемент и является искомым, т. е. $T = T_g$. Здесь $\langle g \rangle^2 = g^* g \det(E_+ + E_- T)$, где $*$ есть сопряжение Клиффорда, антиинволюция, определенная соотношением $w^* = -w$ для $w \in W$. (Антиинволютивность сопряжения $*$ означает, что $(ab)^* = b^* a^*$ для любых $a, b \in A_N$, т. е. при сопряжении меняется порядок множителей.) Для $g \in G(W)$ имеем $g^* g = gg^* \in \mathbb{C}$. Эту формулу можно получить и в случае когда матрица $E_+ + E_- T$ вырождена, но мы этого делать не будем.

Определим подгруппу G_N в группе Клиффорда следующим условием:

$G_N = \{a \in A: \text{существует такой элемент } a^{-1}, \text{ что}$

$$a V_N a^{-1} = V_N \text{ и } a V_N^* a^{-1} = V_N^*\}. \quad (9.2)$$

Предположим теперь, что заданы два таких невырожденных линейных преобразования $V_N \rightarrow V_N$ и $V_N^* \rightarrow V_N^*$, что

$$\psi_i \mapsto \sum_j a_{ji} \psi_j \quad \text{и} \quad \psi_{-i}^* \mapsto \sum_j b_{ij} \psi_{-j}, \quad \text{где} \quad (b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}. \quad (9.3)$$

Вспомнив определение билинейной формы $\langle -, - \rangle$ на W_N , увидим, что эти линейные преобразования определяют ортогональное преобразование в W_N .

Для данного элемента $|u\rangle \in \mathcal{F}_N$ обозначим

$$V_N(|u\rangle) = \{v \in V_N : v|u\rangle = 0\}.$$

Это векторное подпространство в V_N . Например,

$$V_N(|\text{vac}\rangle) = \bigoplus_{0 < i < N} \mathbb{C}\psi_i.$$

В более общем случае, если $|u\rangle = \psi_{m_1} \dots \psi_m, \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle$, где $m_1 < \dots < m_r < 0$ и $n_1 < \dots < n_r < 0$, мы получим

$$V_N(|u\rangle) = \left(\bigoplus_{\substack{0 < i < N \\ i \neq -n_1, \dots, -n_r}} \mathbb{C}\psi_i \right) \oplus \mathbb{C}\psi_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\psi_{m_r}.$$

Отсюда видно, что $\dim(V_N(|u\rangle)) = N = \frac{1}{2} \dim(V_N)$.

Однако если $|u\rangle = (\psi_{-1/2}\psi_{-1/2}^* + \psi_{-3/2}\psi_{-3/2}^*) |\text{vac}\rangle$, то

$$V_N(|u\rangle) = \bigoplus_{5/2 \leq i < N} \mathbb{C}\psi_i,$$

и размерность этого подпространства уменьшается по сравнению с предыдущим случаем и равна $N - 2$. Вообще говоря, если элемент $|u\rangle$ имеет заряд 0, то $\dim V_N(|u\rangle) \leq N$ (см. упражнение 9.2).

В последующем мы будем рассматривать элементы вида $|u\rangle = g|\text{vac}\rangle$ для $g \in G_N$.

Лемма 9.2. Для любых $g, g' \in G_N$ следующие утверждения равносильны:

$$V_N(g|\text{vac}\rangle) = V_N(g'|\text{vac}\rangle) \iff g = cg' \text{ для некоторого } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (9.4)$$

Доказательство. Предположим, что $g \in G_N$. Для $u \in V_N(g|\text{vac}\rangle)$ по определению имеем $ug|\text{vac}\rangle = 0$. Заметив, что $ug = gT_{g^{-1}}(u)$, можно увидеть, что

$$V_N(g|\text{vac}\rangle) = T_g(V_N(|\text{vac}\rangle)). \quad (9.5)$$

(В действительности это тождество справедливо для любого элемента $|v\rangle \in \mathcal{F}_N$, взятого вместо вакуумного вектора $|\text{vac}\rangle$.) Следовательно, для доказательства леммы достаточно доказать утверждение (9.4) только в случае $g' = 1$. Предположим, что $g \in G_N$ и поэтому

$$V_N(g|\text{vac}\rangle) = V_N(|\text{vac}\rangle).$$

Тогда $\psi_i g |\text{vac}\rangle = 0$ для $i > 0$. Как отмечалось ранее, $G_N \cong \text{GL}(V_N)$. Следовательно, используя формулы (9.2) и (9.3), можно увидеть, что $\psi_i^* g |\text{vac}\rangle = 0$ для $i > 0$. Из свойства единственности вакуумного вектора следует, что $g|\text{vac}\rangle$ отличается от $|\text{vac}\rangle$ на скалярный множитель. \square

Таким образом, действие группы $GL(V_N)$ невырожденных линейных преобразований пространства V_N переводит элемент $|vac\rangle$ в векторное подпространство той же размерности N , и обратно, каждое подпространство в V_N той же размерности есть образ вектора $|vac\rangle$ при действии элемента из $GL(V_N)$. Отсюда следует, что орбита $G_N|vac\rangle$ вакуумного вектора может быть отождествлена с грассманианом n -мерных векторных подпространств в V_N . Уравнения, задающие грассманиан, есть соотношения Плюккера, поэтому для грассманиана, обсуждаемого выше, соотношения Плюккера в то же время есть уравнения, определяющие орбиту вакуумного вектора. В следующем параграфе будет приведено уравнение, описывающее орбиту вакуумного вектора в бесконечномерном случае, который, естественно, включает и случай конечномерного пространства Фока.

§ 9.2. Описание вакуумной орбиты

Вернемся к обсуждению билинейного тождества из гл. 6.

Теорема 9.3 (билинейное тождество). Элемент $|u\rangle$ пространства Фока, имеющий нулевой заряд, принадлежит орбите вакуумного вектора тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_i^* |u\rangle \otimes \psi_{-i} |u\rangle = 0. \quad (9.6)$$

Первая часть доказательства такая же, как и в гл. 6, но для удобства чтения приведем её снова.

Доказательство. В случае $|u\rangle = |vac\rangle$ либо фермион ψ_i^* , либо фермион ψ_{-i} являются операторами уничтожения, поэтому равенство (9.6) выполняется.

Пусть X_A — элемент алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$, имеющий следующие коммутационные соотношения с фермионными операторами (см. (6.12)):

$$[X_A, \psi_i^*] = \sum_j (-a_{ij}) \psi_j^* \quad \text{и} \quad [X_A, \psi_{-i}] = \sum_j (a_{ji}) \psi_{-j}.$$

Из этих формул легко получить, что

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}+1/2} [X_A, \psi_i^*] |vac\rangle \otimes \psi_{-i} |vac\rangle + \sum_{i \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_i^* |vac\rangle \otimes [X_A, \psi_{-i}] |vac\rangle = 0.$$

Отсюда соотношение (9.6) инвариантно при действии e^{X_A} , т. е. оно справедливо, если $|u\rangle$ есть точка на орбите вакуумного вектора.

Докажем теперь обратное. Начнем со следующего тождества. Если положить $\varphi^* = \psi_{-i}^* + \psi_i^*$ и $\varphi = \psi_i + \psi_{-j}$, то

$$[\varphi, \varphi^*]_+ = 2 \quad \text{и} \quad e^{\pi i \varphi^* \varphi / 2} = 1 - \varphi^* \varphi \in G.$$

Используя это тождество, получим

$$(1 - (\psi_{-m_1}^* + \psi_{n_1}^*)(\psi_{m_1} + \psi_{-n_1}))\psi_{m_1} \dots \psi_m \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle = \\ = (-1)^{r-1} \psi_{m_2} \dots \psi_m \psi_{n_2}^* \dots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle \quad (9.7)$$

для любых $m_1 < \dots < m_r < 0$ и $n_1 < \dots < n_r < 0$.

Пусть $|u\rangle$ — элемент из \mathcal{F} с зарядом 0. Тогда $|u\rangle$ есть линейная комбинация слагаемых, каждый из которых получен из вакуумного вектора $|\text{vac}\rangle$ применением одинакового числа фермионов ψ_i и ψ_j^* . Среди этих слагаемых возьмем то, которое содержит минимальное число фермионов ψ_i . Если таких слагаемых несколько, то возьмем любое из них (например, мы можем упорядочить их лексикографически по возрастающим значениям индексов у ψ и взять наименьший). Это слагаемое имеет одинаковое число фермионов ψ_i и ψ_j^* , и поэтому в нем можно последовательно редуцировать количество пар фермионных операторов, используя (9.7). Итак, любой вектор $|u\rangle \in (\mathcal{F}_N)_0$ может быть приведен надлежащим действием элементов из группы G к виду

$$|\text{vac}\rangle + \sum_{i,j < 0} c_{ij} \psi_i \psi_j^* |\text{vac}\rangle + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, включающие в себя произведение по крайней мере четырех фермионов. Действуя теперь оператором $\exp\left(-\sum_{i,j < 0} c_{ij} \psi_i \psi_j^*\right) \in G$, можно редуцировать элемент пространства Фока к виду

$$|u'\rangle = |\text{vac}\rangle + \sum_{i,j,k,l < 0} c_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k^* \psi_l^* |\text{vac}\rangle + \dots$$

Как мы уже убедились выше, соотношение (9.6) инвариантно при действии группы G . Используя это обстоятельство, получаем

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} \psi_i^* |u'\rangle \otimes \psi_{-i} |u'\rangle = 0.$$

Из вида элемента $|u'\rangle$ очевидно, что $\psi_i^* |u'\rangle \neq 0$ для $i < 0$, поэтому

$$\psi_{-i} |u'\rangle = 0 \quad \text{для } -i > 0,$$

и аналогично

$$\psi_i^* |u'\rangle = 0 \quad \text{для } i > 0.$$

Это доказывает, что вектор $|u'\rangle$ отличается от вакуумного вектора $|\text{vac}\rangle$ умножением на скаляр. \square

Суммируя вышесказанное, мы видим, что билинейное тождество (9.6) является в действительности соотношением Плюккера. В следующей главе эти соотношения будут переписаны при помощи бозон-фермионного соответствия и мы получим другой способ выведения соотношений Плюккера, которые были изучены в гл. 8. Кроме этого, возникнут связи с другими областями математики. Для этого нам необходима некоторая дополнительная информация, которой мы посвятим следующий параграф.

§ 9.3. Диаграммы Юнга и характеристические полиномы

Сейчас сделаем небольшое отступление, которое поможет нам в следующей главе понять связь между результатами предыдущего параграфа и соотношениями Плюккера. Построим *характеристические полиномы*, которые образуют один из возможных базисов в кольце полиномов. Этот базис применяется в другой области математики, а именно в комбинаторике. Однако, в этом параграфе мы объясним, как при помощи бозон-фермионного соответствия базис (4.11) пространства Фока (\mathcal{F}_N) с зарядом нуль описывается характеристическими полиномами.

Начнем с объяснения, что такое характеристический полином. Введем понятие *диаграммы Юнга*. Эти диаграммы могут быть описаны множеством различных способов, например как набор не увеличивающихся положительных целых чисел (f_1, \dots, f_r) . В графическом представлении диаграмму Юнга можно изобразить как рисунок, составленный из квадратной черепицы в четвертом квадранте плоскости, так что ряды черепицы выровнены по левому краю и количество квадратов в первом ряду равно f_1 , во втором f_2 и т. д. Единственное требование состоит в том, что количество квадратов в рядах не увеличивается при переходе вниз с одного ряда на другой. (см. рис. 9.1).

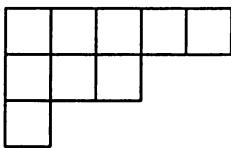


Рис. 9.1. Диаграмма Юнга I: $Y = (5, 3, 1)$

Известно¹⁾, что если ограничить число строк диаграммами, имеющими не более чем n рядов, то такие диаграммы параметризуют неприводимые представления общей линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$.

¹⁾ См., например, *Fulton W., Harris J. Representation Theory. Chap. 15.* — Springer-Verlag, 1991.

Диаграммы Юнга имеют следующее альтернативное описание (см. рис. 9.2).

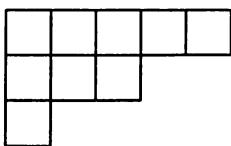


Рис. 9.2. Диаграмма Юнга II: $Y = (4, 1|2, 0)$

Пусть $Y = (f_1, \dots, f_r)$ — диаграмма Юнга, и пусть s — ее диагональная ширина вдоль диагонали северо-запад — юго-восток, измеренная от верхнего левого угла. Обозначим числами $m_1 > \dots > m_s$ количество квадратов, лежащих в каждом горизонтальном ряду выше этой линии (не включая те, которые находятся на диагонали) и $n_1 > \dots > n_s$ — количество черепиц, лежащих ниже этой линии в каждом вертикальном ряду (не включая те, которые лежат на диагонали). Тогда диаграмму Юнга можно задать этими наборами чисел:

$$Y = (m_1, \dots, m_s | n_1, \dots, n_s).$$

Используя это обозначение, определим *характеристический полином*, отвечающий диаграмме Юнга Y , следующим образом:

$$\chi_Y(x) = \det(h_{m_i n_j}(x)),$$

где

$$h_{mn}(x) = (-1)^n \sum_{l \geq 0} p_{l+m+1}(x) p_{n-l}(-x) = (-1)^{n+1} \sum_{l < 0} p_{l+m+1}(x) p_{n-l}(-x)$$

и полиномы Шура $p_i(x)$ были определены формулой (5.20) (положим $p_i(x) = 0$, если $i < 0$). Удобно обозначить

$$q_n(x) = (-1)^n p_n(-x).$$

Полином $h_{mn}(x) = \chi_{(m+1, 1^n)}(x)$ есть характеристический полином, отвечающий крючкообразной диаграмме Юнга $(m+1, 1^n)$, где 1^n означает последовательность $(1, 1, \dots, 1)$ длины n . Отметим, что $p_n(x) = \chi_{(n)}(x)$ есть характеристический полином, отвечающий диаграмме Юнга, состоящей из одной строчки длины n , и $q_n(x) = \chi_{(1^n)}(x)$ — диаграмме (1^n) в виде столбца, составленного из n одиночных квадратов.

Пример 9.1. Приведем несколько примеров, где различные диаграммы Юнга указаны в качестве индекса полинома χ :

$$\begin{aligned}\chi_0(x) &= 1, \quad \chi_{(1)}(x) = x_1, \quad \chi_{(2)}(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2, \\ \chi_{(1,1)}(x) &= \frac{x_1^2}{2} - x_2, \quad \chi_{(2,1)}(x) = \frac{x_1^3}{3} - x_3, \quad \chi_{(2,2)}(x) = \frac{x_1^4}{12} - x_1 x_3 + x_2^2.\end{aligned}$$

Для краткости более не будем углубляться в детали. Скажем только, что характеристический полином для диаграммы Юнга Y можно получить из матрицы представления для неприводимого характера группы $GL(n, \mathbb{C})$, определяемого Y , записывая сумму степеней собственных значений этой матрицы через симметрические функции. (Это определение не зависит от размера матриц n при условии, что оно больше, чем количество строчек в диаграмме Юнга.) Интересующимся читателям следует обратиться к специальным учебникам²⁾. В последующем полином $\chi_Y(x)$ будем называть характеристическим полиномом. Известно, что характеристические полиномы образуют базис в кольце полиномов.

Теорема 9.4. Бозон-фермионное соответствие устанавливает изоморфизм между векторами пространства Фока с зарядом нуль вида

$$\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^* |vac\rangle$$

для $m_1 < \dots < m_r < 0$ и $n_1 < \dots < n_r < 0$

и характеристическими полиномами для диаграммы Юнга следующего вида:

$$Y = (-m_1 - 1/2, \dots, -m_r - 1/2 \mid -n_1 - 1/2, \dots, -n_r - 1/2),$$

умноженными на $(-1)^{\sum_{i=1}^{r-1} (n_i + 1/2) + r(r-1)/2}$.

Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой. Определим, как в гл. 5, фермионы, зависящие от времен:

$$\phi_n(x) = e^{H(x)} \psi_n e^{-H(x)}, \quad \psi_n^*(x) = e^{H(x)} \psi_n^* e^{-H(x)}$$

и, используя формулы (5.21) и (5.22), запишем

$$\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{n+j} p_j(x) \quad \text{и} \quad \psi_n^*(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n+j}^* p_j(-x).$$

²⁾ См., например, книгу Макдональд И. Г. Симметрические функции и многочлены Холла. — М., Мир, 1985.

Лемма 9.5. Для $m, n > 0$ выполняется равенство

$$h_{mn}(x) = (-1)^n \langle \text{vac} | \psi_{-m-1/2}(x) \psi_{-n-1/2}^*(x) | \text{vac} \rangle.$$

Доказательство. Подстановка указанных формул приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \psi_i(x) \psi_j^*(x) | \text{vac} \rangle &= \sum_{s,t=0}^{\infty} \langle \text{vac} | \psi_{i+s} \psi_{j+t}^* | \text{vac} \rangle p_s(x) p_t(-x) = \\ &= \sum_{-s < i, 0 \leq t < -j} p_s(x) p_t(-x) \delta_{i+j+s+t, 0} = \sum_{t=0}^{-j-1/2} p_{-i-j-t}(x) p_t(-x) = \\ &= \sum_{t=0}^{-j-1/2} p_{-i+1/2+t}(x) p_{-j-1/2-t}(-x) = (-1)^{i+1/2} h_{-i-1/2, -j-1/2}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 9.4 осталось сравнить определение характеристического полинома и формулировку теоремы Вика.

Возникающие здесь диаграммы Юнга могут быть более просто выражены в терминах диаграмм Майя. Объясним связь между диаграммами Майя и диаграммами Юнга (см. рис. 9.3). Опишем это соответствие на конкретном примере, надеясь, что ситуация с общим случаем будет ясна из этого примера. Рассмотрим диаграмму Майя $m = \{-7/2, -5/2, -1/2, 3/2, 7/2, \dots\}$, где многоточие означает, что начиная с этого места все позиции заняты черными шарами.

Представим себе бесконечную рулетку с метками, отвечающими целым числам. На этой рулетке между метками располагаются белые или черные камни в соответствии с заданной диаграммой Майя. Будем сгибать рулетку в зависимости от положения этих камней и в соответствии со следующим правилом. Начнем с номеров $i \ll 0$, где все камни с номерами $i < -7/2$ белые. Для этого сегмента диаграммы Майя поместим нашу рулетку вертикально. Когда при движении вдоль диаграммы Майя мы встретим черный камень, повернем рулетку направо на 90° . Когда начнутся появляться одни черные камни, будем продолжать выкладывать рулетку направо до бесконечности.

В рассматриваемом примере рулетка располагалась вертикально до метки -4 . Присутствие черных камней на позициях $-7/2$ и $-5/2$ привело к повороту рулетки направо на два шага от -4 до -2 . Затем один шаг вверх (для $-3/2$), один вправо (для $-1/2$), вверх (для $1/2$), вправо (для $3/2$), вверх (для $5/2$). Так как все камни, начиная с позиции $7/2$, черные, далее рулетка направлена горизонтально направо.

Этим способом диаграмма Юнга может быть определена как область плоскости, ограниченная продолжениями вертикальной и горизонтальной

частей рулетки и ее искривленной части. Заряд диаграммы Майя отождествляется с числом $i + 1/2$, если два продолжения горизонтальных участков встречаются в интервале от i до $i + 1$. В настоящем примере заряд равен -1 (см. рис. 9.3). Диаграмме Юнга можно присвоить заряд,

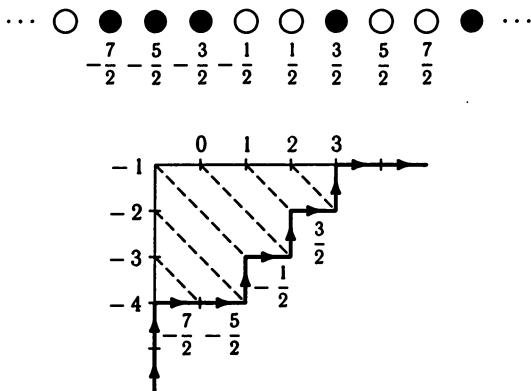


Рис. 9.3. Диаграмма Майя $m = \{-7/2, -5/2, -1/2, 3/2, 7/2, \dots\}$
и соответствующая ей диаграмма Юнга

если сначала расположить ее в четвертом квадранте плоскости, так чтобы левый верхний угол диаграммы совпал с началом координат, и затем сместить ее вверх или вниз (но не в сторону), так чтобы левый верхний угол достиг нужного заряда. Чтобы перейти от заряженной диаграммы Юнга к диаграмме Майя, проделаем те же шаги в обратном порядке. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между заряженными диаграммами Юнга и диаграммами Майя.

Рассмотрим диаграмму Майя с белыми камнями при $-m_r < \dots < -m_1$ между метками с положительными номерами, и с черными камнями при $n_1 < \dots < n_s$ между метками с отрицательными номерами. Соответствующая диаграмма Юнга может быть описана следующим образом. Ее диагональная ширина равна $\max(r, s)$. Если $r \geq s$, то количество квадратов справа от диагональной линии в каждой последовательной строке равно

$$-m_1 - 1/2 - (r - s) > \dots > -m_r - 1/2 - (r - s),$$

а число квадратов ниже диагонали в каждом столбце есть

$$-n_1 - 1/2 + (r - s) > \dots > -n_s - 1/2 + (r - s) > r - s - 1 > \dots > 0.$$

Если $s \geq r$, то количество квадратов справа от диагональной линии в каждой строке равно

$$-m_1 + 1/2 + (s - r) > \dots > -m_r + 1/2 + (s - r) > s - r > \dots > 1,$$

а число квадратов ниже диагонали в каждом столбце равно

$$-n_1 - 1/2 - (s - r) > \dots > -n_s - 1/2 - (s - r).$$

Упражнения к главе 9

9.1. Докажите, что конечномерная алгебра Клиффорда $\mathcal{A}(W_N)$, введенная в § 9.1, изоморфна алгебре всех матриц размера $2^{2N} \times 2^{2N}$ (ср. гл. 4, упражнение 4.1). Используя этот результат, докажите, что центр алгебры $\mathcal{A}(W_N)$ совпадает с \mathbb{C} .

9.2. В случае конечномерного пространства Фока докажите, что $\dim V_N(|\mu\rangle) \leq N$ для элемента $|\mu\rangle$, имеющего нудевой заряд.

9.3. Проверьте соотношение между диаграммами Юнга и диаграммами Майя, описанное в § 9.3, в частном случае

$$m = \{-11/2, -7/2, -3/2, -1/2, 5/2, 7/2, 13/2, \dots\}.$$

9.4. Определите характеристические полиномы, отвечающие следующим диаграммам Юнга:

- (а) $Y_1 = (3, 1)$;
- (б) $Y_1 = (3, 2, 1)$;
- (в) $Y_1 = (4, 2, 1)$.

ГЛАВА 10

БИЛИНЕЙНОЕ ТОЖДЕСТВО

В этой главе будет показано, что билинейное тождество, которое обсуждалось в предыдущих главах, может быть переписано как соотношения Плюккера для бесконечномерного грассманниана. Эту главу можно рассматривать как упражнение по применению теоремы Вика. Кроме того, из соотношений Плюккера будет получено уравнение Хироты.

§ 10.1. Билинейное тождество и соотношения Плюккера

Пусть $|u\rangle \in \mathcal{F}_0$ — элемент пространства Фока с зарядом нуль и

$$f(x; |u\rangle) = \langle \text{vac} | e^{H(x)} | u \rangle.$$

Тогда вследствие бозон-фермионного соответствия этот матричный элемент как функция времени x — элемент бозонного пространства Фока, соответствующего вектору $|u\rangle$. Так как характеристические полиномы $\chi_Y(x)$ образуют базис полиномиального кольца, мы можем разложить $f(x; |u\rangle)$ по этому базису:

$$f(x; |u\rangle) = \sum_Y c_Y(|u\rangle) \chi_Y(x),$$

где $\chi_Y(x)$ — характеристический полином для диаграммы Юнга Y и суммирование происходит по всем диаграммам Юнга. В этом параграфе будет показано, что необходимым и достаточным условием того, что левая часть этого равенства есть τ -функция для иерархии КП, является условие, что коэффициенты $c_Y(|u\rangle)$ удовлетворяют соотношениям Плюккера.

В главе 4 было показано, что пространство Фока \mathcal{F}_0 с зарядом нуль порождено векторами вида

$$f(m, n) = \psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^* | \text{vac} \rangle,$$

где $m = (m_1, \dots, m_r)$ и $n = (n_1, \dots, n_r)$. Однако в этой главе использование такой параметризации базисных векторов не совсем удобно, так как это ведет к многочисленным несущественным знакам в формулах. Чтобы избежать этого, занумеруем базисные векторы пространства Фока \mathcal{F}_l

диаграммами Майя $\alpha = (\alpha_j)_{j \geq 1}$. Для этого мы расширим понятие диаграмм Майя. В главе 4 последовательность α полуцелых чисел была названа диаграммой Майя, если выполнялись следующие условия:

- (i) $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ для всех $j \geq 1$,
- (ii) $\alpha_j + 1 = \alpha_{j+1}$ для достаточно больших j .

В этой главе мы опустим условие (i) и потребуем только выполнения условия (ii). Такую последовательность чисел α назовем *заряженной диаграммой Майя*.

Пусть α — заряженная диаграмма Майя. Положим

$$l = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(j - \alpha_j - \frac{1}{2} \right).$$

Целое число l назовем *зарядом* диаграммы α . Сопоставим диаграмме α вектор $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_l$. Очевидно, что $|\alpha\rangle$ есть вектор пространства Фока с зарядом l .

Если условие (i) выполнено, то

$$|\alpha\rangle = \psi_{\alpha_1}^* \psi_{\alpha_2}^* \psi_{\alpha_3}^* \dots |\Omega\rangle. \quad (10.1)$$

Пусть диаграмма α имеет вид

$$\alpha = \left(n_1, \dots, n_r, \frac{1}{2}, \dots, -m_r - 1, -m_r + 1, \dots, -m_1 - 1, m_1 + 1, \dots \right).$$

Тогда вектор $|\alpha\rangle$ совпадает с $\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^* |\text{vac}\rangle$ с точностью до знака.

Определим $|\alpha\rangle = 0$, если $\alpha_j = \alpha_k$ для некоторых индексов $j \neq k$. Выбирая такую перестановку индексов $\sigma: \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$, что $\sigma(j) = j$ почти для всех j , из диаграммы α можно получить диаграмму β : $\beta_j = \alpha_{\sigma(j)}$. Подберем эту перестановку таким образом, чтобы для диаграммы β было выполнено условие (i). В этом случае $|\alpha\rangle = \text{sign}(\sigma) |\beta\rangle$.

Для краткости будем говорить, что диаграмма α есть диаграмма Майя, даже если она не удовлетворяет условию (i). Для полуцелого числа b и диаграммы Майя α обозначим через $a \oplus b$ диаграмму Майя вида $(b, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Для диаграммы Майя α обозначим через $\alpha \ominus \alpha_j$ диаграмму $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots)$. Если $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_l$, то $|\alpha \oplus b\rangle \in \mathcal{F}_{l+1}$ и $|\alpha \ominus \alpha_j\rangle \in \mathcal{F}_{l-1}$.

В § 9.2 (теорема 9.3) было показано, что необходимым и достаточным условием того, что элемент

$$f = \sum_{\alpha} c(\alpha) |\alpha\rangle$$

принадлежит орбите вакуумного вектора $|\text{vac}\rangle$, является соотношение

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} + 1/2} \psi_i^* f \otimes \psi_{-i} f = 0. \quad (10.2)$$

В формуле для элемента f суммирование проходит по диаграммам Майя в строгом смысле, т. е. по элементам с зарядом нуль. Удобно использовать обозначение $c(\alpha)$ и для произвольной заряженной диаграммы Майя. Положим $c(\alpha) = 0$, если $|\alpha| = 0$. Для диаграмм α и β , описанных выше, положим

$$c(\alpha) = \text{sign}(\sigma)c(\beta).$$

Основным результатом этой главы является переформулировка условия (10.2) на языке коэффициентов $c(\alpha)$. Пусть γ — диаграмма Майя с зарядом 1, а δ — диаграмма Майя с зарядом -1 . Тогда условие (10.2) эквивалентно следующему:

$$\sum_{j=1} (-1)^j c(\gamma \ominus \gamma_j) c(\delta \oplus \gamma_j) = 0. \quad (10.3)$$

Доказательство этого факта несложно, и мы оставляем его читателю. Приведем пример для $\gamma = \{-1/2, 1/2, 3/2, \dots\}$ и $\delta = \{-3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= c(\{1/2, 3/2, 5/2, \dots\})c(\{-3/2, -1/2, 5/2, 7/2, \dots\}) - \\ &\quad - c(\{-1/2, 3/2, 5/2, \dots\})c(\{-3/2, 1/2, 5/2, 7/2, \dots\}) + \\ &\quad + c(\{-1/2, 1/2, 5/2, 7/2, \dots\})c(\{-3/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots\}). \end{aligned} \quad (10.4)$$

§ 10.2. Соотношения Плюккера и уравнение Хироты

Используя результаты предыдущего параграфа, покажем, что соотношения Плюккера приводят к билинейным дифференциальным уравнениям Хироты.

Для элемента $g \in G$ определим функцию

$$\tau(x; g) = \langle \text{vac} | e^{H(x)} g | \text{vac} \rangle,$$

которая является элементом бозонного пространства Фока вследствие бозон-фермионного соответствия. Это есть τ -функция иерархии КП. Так как характеристические полиномы образуют базис в полиномиальном кольце, можно представить функцию $\tau(x; g)$ как их линейную комбинацию:

$$\tau(x; g) = \sum_Y c_Y(g) \chi_Y(x),$$

где $\chi_Y(x)$ — характеристический полином, соответствующий диаграмме Юнга Y , и суммирование происходит по всем диаграммам Юнга. В предыдущем параграфе было показано, что коэффициенты $c_Y(g)$ удовлетворяют

соотношениям Плюккера. Будем называть эти коэффициенты $c_Y(g)$ координатами Плюккера для τ -функции $\tau(x)$.

Напомним, что $\tau(x)$ есть элемент полиномиального кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Обозначим через ∂_i частные производные по переменным x_i , и пусть $\mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$ — полиномиальное кольцо, порожденное ∂_i . Это кольцо является коммутативным кольцом дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Используя подстановку $x_i \mapsto (1/i)\partial_i$ для каждого полинома $p(x)$, запишем дифференциальный полином $p(\bar{\partial}_x) \in \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$. Формула

$$\langle p(\bar{\partial}_x), f(x) \rangle = p(\bar{\partial}_x)f(x)|_{x \rightarrow 0} \quad (10.5)$$

описывает невырожденное спаривание между полиномиальными кольцами $\mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots]$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Легко увидеть, что при этом спаривании элементы

$$\left\{ \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \frac{x_2^{m_2}}{m_2!} \dots \right\}_{m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots} \quad \text{и} \quad \{\partial_1^{m_1} \partial_2^{m_2}\}_{m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots}$$

образуют дуальные базисы. В частности, если как в гл. 4, присвоить переменной x_i степень i и символу ∂_i — степень $-i$, то можно записать разложения этих колец в однородные компоненты:

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[x]_n \quad \text{и} \quad \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[\partial_x]_{-n}.$$

Спаривание $\langle p(\bar{\partial}_x), f(x) \rangle$ индуцирует такое невырожденное спаривание между $\mathbb{C}[x]_n$ и $\mathbb{C}[\partial_x]_{-n}$, что $\langle \mathbb{C}[\partial_x]_{-m}, \mathbb{C}[x]_n \rangle = 0$ для $m \neq n$.

Если перейти к базису кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$, образованному характеристическими полиномами, то будет справедливо следующее соотношение ортогональности (см. упражнение 10.3).

Лемма 10.1. Для любых двух диаграмм Юнга Y, Y' выполняется равенство

$$\langle \chi_Y(\bar{\partial}_x), \chi_{Y'}(x) \rangle = \delta_{YY'}.$$

Другими словами, любой полином $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ может быть записан как линейная комбинация характеристических полиномов:

$$f(x) = \sum_Y c_Y \chi_Y(x),$$

а коэффициенты c_Y вычисляются следующим образом:

$$c_Y = \langle \chi_Y(\bar{\partial}_x), f(x) \rangle.$$

Это соотношение ортогональности позволяет получить много интересных следствий. Для $g \in G$ положим $g(x) = e^{H(x)}ge^{-H(x)}$ и рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\tau(x+y; g) &= \langle \text{vac} | e^{H(x+y)}g | \text{vac} \rangle = \langle \text{vac} | e^{H(x)}e^{H(y)}g | \text{vac} \rangle = \\ &= \tau(x; g(y)) = \sum_Y c_Y(g(y))\chi_Y(x).\end{aligned}\quad (10.6)$$

Тогда в силу леммы 10.2 получаем

$$c_Y(g(y)) = \langle \chi_Y(\bar{\partial}_x), \tau(x+y; g) \rangle = \chi_Y(\bar{\partial}_x)\tau(x+y; g)|_{x \rightarrow 0}.$$

Используя соотношение

$$\frac{\partial \tau(x+y; g)}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau(x+y; g)}{\partial y_i}$$

вместе с разложением

$$\tau(x+y; g) = \sum_Y c_Y(g)\chi_Y(x+y),$$

нетрудно получить, что

$$c_Y(g(y)) = \chi_Y(\bar{\partial}_y)\tau(x+y; g)|_{x \rightarrow 0} = \chi_Y(\bar{\partial}_y)\tau(y; g).$$

Это позволяет сформулировать следующую лемму.

Лемма 10.2. *Пусть $c_Y(g)$ — координаты Плюккера функции $\tau(x; g)$ для элемента $g \in G$. Рассмотрим временную эволюцию $g(x) = e^{H(x)}ge^{-H(x)}$ группового элемента g . Пусть $\tau(x; g)$ — τ -функция соответствующей иерархии КП. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$(i) \quad c_Y(g) = \chi_Y(\bar{\partial}_x)\tau(x; g)|_{x \rightarrow 0},$$

$$(ii) \quad c_Y(g(x)) = \chi_Y(\bar{\partial}_x)\tau(x; g).$$

В частности, функции $\{c_Y(g(x))\}$ также являются координатами Плюккера для τ -функции иерархии КП.

С учётом того, что координаты Плюккера удовлетворяют соотношениям Плюккера, из утверждения (ii) предыдущей леммы получаем, что τ -функция удовлетворяет билинейным дифференциальным уравнениям Хироты.

Пример 10.1. Запишем соотношения Плюккера, которые рассматривались в конце § 10.1, через τ -функцию. Используя таблицу характеристических полиномов из примера 9.1 и лемму 10.2, соотношение Плюккера (10.4) можно записать как следующее дифференциальное соотношение на

τ -функцию:

$$0 = \frac{1}{12}\tau(x) \cdot (\partial_1^4 - 4\partial_1\partial_3 + 3\partial_2^2)\tau(x) - \frac{1}{3}\partial_1\tau(x) \cdot (\partial_1^3 - \partial_3)\tau(x) + \\ + \frac{1}{4}(\partial_1^2 + \partial_2)\tau(x) \cdot (\partial_1^2 - \partial_2)\tau(x).$$

Если преобразовать это дифференциальное уравнение в форму Хироты, мы получим

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau \cdot \tau = 0,$$

что совпадает с уравнением КП в форме Хироты, которое уже появлялось в гл. 3.

Упражнения к главе 10

10.1. Докажите условие (10.3).

10.2. Покажите, что соотношение Плюккера (10.4) есть то же самое соотношение Плюккера, что и в §8.3. Объясните причину этого факта.

10.3. Найдите матрицу, описывающую связь базисов

$$\{x_3, x_2x_1, x_1^3/6\} \quad \text{и} \quad \{\chi_{(3)}(x), \chi_{(2,1)}(x), \chi_{(1,1,1)}(x)\}$$

в пространстве кубических полиномов. Проверьте соотношение (10.2) для этого случая.

10.4. Определите соотношение Плюккера, из которого получается дифференциальное уравнение в билинейной форме Хироты

$$(D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau \cdot \tau = 0.$$

Решение упражнений

Глава 1

1.1. Необходимо найти такую функцию $F(x, t)$, что

$$F(x, 0) = x \quad \text{и} \quad \partial F / \partial t = x^2 (\partial F / \partial x).$$

Разложите эту функцию по степеням переменной t в виде $F(x, 0) = x + ta_1 + t^2 a_2 + \dots$ и подставьте в уравнение. Сравнивая коэффициенты при разных степенях переменной t , вы получите, что $a_1 = x^2$ и т. д. Постарайтесь угадать общую формулу для коэффициентов a_i . Ответ: $x/(1 - tx)$.

1.2. Для решения задачи следует рассмотреть дифференциальный полином $\hat{K}(u) = Au^4 u_x + Bu^2 u_{3x} + Cuu_x u_{2x} + Du_x^3 + Eu_{5x}$, вычислить $(\partial/\partial t)(\hat{K}(u))$ и $(\partial/\partial s)(K(u))$, следя методу, изложенному после уравнения (1.19), и затем приравнять коэффициенты, чтобы определить A, B, C, D, E . Ответ:

$$\frac{1}{2}u^4 u_x + u^2 u_{3x} + 4uu_x u_{2x} + u_x^3 + \frac{3}{5}u_{5x}.$$

1.3. Из уравнения $\frac{\partial B}{\partial y} + [B, P] = 0$ получим $3u_{yy} + u_{4x} + 6(uu_x)_x = 0$. Это уравнение называется *уравнением Буссинески*.

Глава 2

2.1. Представьте $\partial \circ f$ как оператор, действующий на функции по правилу $(\partial \circ f)(g) = \partial(fg) = (f\partial)g + (\partial f)g$. Аналогично $(\partial^n \circ f)(g)$ есть n -кратная производная от произведения fg , которая может быть вычислена по правилу Лейбница:

$$(\partial^n \circ f)(g) = \partial^n(fg) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (\partial^k f)(\partial^{n-k} g).$$

2.2. Ответ:

$$\sum_{l=0}^{\infty} h_l \partial^{\alpha+\beta-l}, \quad \text{где} \quad \sum_{i+j+k=l} \binom{\alpha-i-j}{i} f_i \partial^i g_k,$$

или, другими словами,

$$\sum_{j,k,k'=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{j} (f_k \partial^j g_{k'}) \partial^{\alpha+\beta-j-k-k'}.$$

2.3. Пусть $(\partial + x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_{n-1} \partial^{-n}$. Перемножая, получим $(\partial + x)(a_0 \partial^{-1} - a_1 \partial^{-2} + a_2 \partial^{-3} - \dots) = 1$, а приравнивая коэффициенты при ∂^{-n} , получим $a_0 = 1$, $a_n - xa_{n-1} + da_{n-1} = 0$ для $n \geq 1$. Таким образом, $a_0 = 1$, $a_1 = x$, $a_2 = x^2 + 1$, $a_3 = x^3 + 3x$, $a_4 = x^4 + 6x^2 + 3$, а общее решение имеет вид

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} x^{n-2k}.$$

2.4. Ответ: $\text{ord } L_1, L_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\text{ord}[L_1 L_2] = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$.

2.5. Если l четно, то $(P^{l/2})_+ = P^{l/2}$ и, следовательно, $[P, (P^{l/2})_+] = 0$.

2.6. Ответ:

$$(P^{5/2})_+ = \partial^5 + \frac{5u}{2}\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15u^2}{8}\right)\partial + \frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x,$$

$$[P, (P^{5/2})_+] = -\frac{1}{16}(u_{5x} + 10uu_{xxx} + 30u^2u_x + 20u_xu_{xxx}).$$

2.7. Мы имеем

$$Le^{\xi(x,k)} = (\partial + f_1 \partial^{-1} + f_2 D^{-2} + \dots)(1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} + \dots)e^{\xi(x,k)} = \\ = (\partial + w_1 + (\partial w_1 + w_2 + f_1)\partial^{-1} + (\partial w_2 + w_3 + f_1 w_1 + f_2)\partial^{-2} + \dots)e^{\xi(x,k)},$$

и поэтому

$$\partial w_1 + f_1 = 0 \quad \text{и} \quad \partial w_2 + f_1 w_1 + f_2 = 0.$$

Глава 3

3.1. Вычислив

$$D_l D_x f \cdot f = 2ff_{xt} - 2f_t f_x \quad \text{и} \quad D_x^4 f \cdot f = 2ff_{4x} - 8f_x f_{3x} + 6f_{2x}^2,$$

приведём уравнение (3.2) к виду

$$8ff_{xt} - 8f_t f_x - 2ff_{4x} + 8f_x f_{3x} - 6f_{2x}^2 = 0.$$

Присвоим переменной x вес 1, а переменной t — вес 3 и будем искать однородные решения степени не выше 6. Очевидно, что любой полином степени не выше 3 есть решение. Для степени 4 решение имеет вид tx , для степени 5 решений нет, а для степени 6 получим 3 решения

$$-\frac{1}{45}x^6 + \frac{1}{3}tx^3 + t^2, \quad -\frac{1}{3}tx^3 + t^2 \quad \text{и} \quad t^2.$$

3.3. Рассмотрим действие $B \mapsto [A, B]$, и обозначим его $\text{ad}(A)(B) = [A, B]$. Тогда

$$e^A B e^{-A} = e^{\text{ad}(A)B}$$

и, следовательно,

$$e^A e^B e^{-A} = \exp(\text{ad}(A)B).$$

Но так как $\text{ad}(A)(B)$ — скаляр, $\text{ad}(A)^n B = 0$ для $n \geq 2$. Отсюда следует, что

$$e^A e^B e^{-A} = \exp(B + [A, B]) = e^{[A, B]} e^B.$$

3.4. Мы имеем

$$X(p_1, q_1)X(p_2, q_2) = C(p_1, q_1, p_2, q_2) : X(p_1, q_1)X(p_2, q_2) :,$$

$$\text{где } C(p_1, q_1, p_2, q_2) = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}.$$

Обозначение : : следует понимать как указание на то, что внутри двоеточий мы изменили порядок операторов, переставив все операторы дифференцирования направо, а все операторы умножения налево. (Это все подробно объясняется в гл. 5.) Например,

$$: x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 := x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Выражение $C(p_1, q_1, p_2, q_2)$ симметрично при перестановке $1 \leftrightarrow 2$, поэтому на первый взгляд кажется, что коммутатор должен обратиться в нуль. Однако если мы разложим оператор $X(p, q)$ по степеням переменных p и q с коэффициентами X_{mn} :

$$X(p, q) = \sum X_{mn} p^m q^n,$$

коммутаторы $[X_{m_1 n_1}, X_{m_2 n_2}]$ не обязательно должны обращаться в нуль. Это противоречие может быть разрешено следующим образом: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n$ есть ненулевой формальный степенной ряд по x . Но мы можем просуммировать

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x^n = \frac{x^{-1}}{1 - x^{-1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x},$$

и получить 0 как рациональную функцию:

$$\frac{x^{-1}}{1 - x^{-1}} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

Поэтому на величину $C(p_1, q_1, p_2, q_2)$ следует смотреть как на формальный степенной ряд

$$\frac{(1 - p_2/p_1)(1 - q_2/q_1)}{(1 - q_2/p_1)(1 - p_2/q_1)},$$

разложенный по степеням переменных q_2/p_1 и p_2/q_1 , и в этом смысле она не равна нулю. Обозначим $\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n$. Этот формальный ряд обладает тем свойством, что $f(x)\delta(x) = f(1)\delta(x)$ для любого формального степенного ряда $f(x)$, если значение $f(1)$ определено. Используя это обозначение, можно увидеть, что

$$[X(p_1, q_1), X(p_2, q_2)] = \\ = \frac{(1 - q_1/p_1)(1 - q_2/p_2)}{(1 - q_2/p_1)} \delta\left(\frac{p_2}{q_1}\right) X(p_1, q_2) - \frac{(1 - q_1/p_1)(1 - q_2/p_2)}{(1 - q_1/p_2)} \delta\left(\frac{p_1}{q_2}\right) X(p_2, q_1).$$

Таким образом, вершинные операторы образуют алгебру Ли.

$$3.5. \text{ Ответ: } x_1, x_2 + \frac{x_1^2}{2}, x_2 - \frac{x_1^2}{2}, x_3 + x_1 x_2 + \frac{x_1^3}{6}, x_3 - \frac{x_1^3}{3} \text{ и } x_3 - x_1 x_2 + \frac{x_1^3}{6}.$$

В этом случае для $k \in \mathbb{C}$ единственный полюс находится в точке $k = 0$.

3.6. Положив $x_j = x'_j$ для всех j и вычисляя вычет, получим $\bar{w}_1 = 0$. Затем, после дифференцирования по x'_1 и аналогичного рассуждения, мы получаем $\bar{w}_2 = 0$ и т. д.

Глава 4

4.1. По определению $\psi v_1 = \psi |vac\rangle = 0$ и $\psi v_2 = \psi\psi^*|vac\rangle = v_1$. Аналогично для ψ^* .

4.3. Применяя теорему Вика, получаем $\langle \psi_{m_i} \psi_{n_j} \rangle = 0$ и $\langle \psi_{n_i}^* \psi_{n_j}^* \rangle = 0$, поэтому единственны слагаемые, которые не обратятся в нуль, — это

$$\langle \psi_{m_1} \psi_{n_{\sigma(1)}}^* \rangle \dots \langle \psi_{m_s} \psi_{n_{\sigma(s)}}^* \rangle$$

для каждой перестановки σ . Заметив, что для тождественной перестановки $\sigma = \text{id}$ и она имеет знак $+1$, получаем определение детерминанта.

Рассматривая спаривание векторов

$$\langle u \rangle = \langle vac | \psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^* \rangle, \quad |v\rangle = \psi_{-m'_1} \dots \psi_{-m'_s} \psi_{-n'_1}^* \dots \psi_{-n'_r}^* |vac\rangle$$

для $0 < m_1 < \dots < m_r$, $0 < n_1 < \dots < n_s$ и $0 < m'_1 < \dots < m'_s$, $0 < n'_1 < \dots < n'_r$ и рассуждая, как выше (с точностью до знака), получаем

$$\det(\langle \psi_{m_i} \psi_{-n'_j}^* \rangle) \det(\langle \psi_{n_k}^* \psi_{-m'_l} \rangle) = \pm \prod_{i=1}^r \delta_{m_i n'_i} \prod_{k=1}^s \delta_{n_k m'_k},$$

что эквивалентно утверждению о невырожденности спаривания.

Глава 5

5.1. Из соотношения (5.10) следует, что

$$[H_m, H_n] = \sum_j [H_m, \psi_{-j} \psi_{j+n}^*] = \sum_j (\psi_{-j+m} \psi_{j+n}^* - \psi_{-j} \psi_{j+m+n}^*).$$

Неправильное вычисление выглядит так: если в первом слагаемом сдвинуть индекс суммирования $j \mapsto j + m$ то суммы совпадут и, следовательно, сократятся.

При правильном вычислении слагаемые в скобках следует сначала переписать в нормально упорядоченном виде

$$:\psi_{-j+m} \psi_{j+n}^* - \psi_{-j} \psi_{j+m+n}^*: + \delta_{m+n,0} (\theta(j < m) - \theta(j < 0)).$$

После этого мы получим, что сумма нормально упорядоченных слагаемых действует на каждый вектор как конечная сумма, поэтому перенумерация $j \mapsto j + m$ возможна и сумма этих слагаемых дает 0. Остальные члены после суммирования дают вклад $m \delta_{m+n,0}$.

5.2. Ответ: $x_4 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 x_1^2 - \frac{1}{8}x_1^4$.

5.3. В разложении $e^{H(x)} = \sum f_j(x) a_j$ только те элементы a_j имеют энергию $-d + l^2/2$, для которых $\langle l | a_j | u \rangle \neq 0$. Следовательно, соответствующие коэффициенты $f_j(x)$ все имеют вес $d - l^2/2$.

5.4. Для каждого n слагаемое ψ_n (соответственно ψ_n^*), появляющееся в (4.11), дает вклад в характер слагаемого zq^{-n} (соответственно $z^{-1}q^{-n}$).

5.5. Характер пространства $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ равен

$$\sum_{m_1, m_2, \dots \geq 0} q^{m_1 + 2m_2 + \dots} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m_n=0}^{\infty} q^{nm_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}.$$

Мы знаем, что элемент $\langle I \rangle$ имеет заряд l и энергию $l^2/2$. Теперь, из-за того, что мы отождествили подпространство \mathcal{F}_l с $z^l \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$, характер всего пространства Фока \mathcal{F} равен указанному в формулировке задачи. Вторая часть получается из упражнений 5.3 и 5.4 заменой z на $-zq^{-1/2}$.

Глава 6

6.1. Первую часть мы опустим. Что касается второй части, то видно, что сечение $z = 0$ кривой (6.2) содержится в орбите. Используйте, например, элементы

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа G содержит вращения вокруг оси x , задаваемые матрицей

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

что и дает кривую (6.2).

Глава 7

7.1. Достаточно доказать, что для $X, Y \in \mathfrak{sl}_2$ элементы $A(t) = Xt^m$ и $B(t) = Yt^n \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ удовлетворяют соотношению $\omega(A, B) = m\delta_{m+n,0} \text{Tr}(XY)$.

Глава 8

8.1. Представьте, что сфера касается плоскости своим южным полюсом, и рассмотрите стереографическую проекцию сферы на плоскость из точки северного полюса.

8.3. Пусть W — m -мерное векторное пространство V и $M_W = (v_{ij})$ ($1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq N$) — остав в W . Необходимое и достаточное условие для того, чтобы вектор $(x_1, \dots, x_N) \in V$ принадлежал W , состоит в том, что матрица размера $(m+1) \times N$, полученная из M добавлением этого вектора как строки, должна иметь ранг m . Поэтому для любого набора индексов $(\beta_1, \dots, \beta_{m+1})$ можно получить

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j x_{\beta_j} v_{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{m+1}} = 0.$$

Набор из $\binom{N}{m+1}$ гиперплоскостей в V определяется координатами Плюккера для W единственным образом, и само пространство W содержится в пересечении всех этих плоскостей. Мы должны доказать, что вышеприведенная система линейных уравнений на x_i имеет пространство решений размерности не выше m , и тогда

получим, что пространство W совпадет с этим пересечением и единственным образом определяется координатами Плюккера.

Для этого предположим, что $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ есть одна из ненулевых координат Плюккера. Выберем $(\beta_1, \dots, \beta_{m+1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, i)$ для $i \neq \beta_j$ и запишем линейное уравнение

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j x_{\alpha_j} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m, i} + (-1)^{m+1} x_i v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0.$$

Перенумеровав координаты Плюккера, получим

$$x_i v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} - \sum_{j=0}^m x_{\alpha_j} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, i, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m} = 0.$$

Разбивая множество $\{1, \dots, N\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \cup \{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N\}$ на два подмножества и рассматривая это уравнение для каждого $i = \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N$, легко увидеть, что матрица коэффициентов размера $(N-m) \times N$ для этой системы уравнений имеет ранг $N-m$. Действительно, минор, образованный столбцами с номерами $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_N$, равен $(v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m})^{N-m} \neq 0$.

8.4. Пусть $\sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$ есть соотношение линейной зависимости. Мы должны доказать, что $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$. Рассмотрим m -мерное подпространство, натянутое на первые m стандартных векторов $v_i = (v_{ij})$ для $i = 1, \dots, m$, $v_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда координаты Плюккера этого подпространства есть $v_{1, \dots, m} = 1$ и $v_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$ для $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \neq \{1, \dots, m\}$. Следовательно, $c_{1, \dots, m} = 0$.

8.5. Проделайте разложение Лапласа для определителя

$$\begin{vmatrix} v_{1\beta_1} & \dots & v_{1\beta_{m+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\beta_1} & \dots & v_{m\beta_{m+1}} & 0 & \dots & 0 \\ v_{1\beta_1} & \dots & v_{1\beta_{m+1}} & v_{1\alpha_1} & \dots & v_{1\alpha_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m\beta_1} & \dots & v_{m\beta_{m+1}} & v_{m\alpha_1} & \dots & v_{m\alpha_{m-1}} \end{vmatrix}$$

по первым верхним m строкам.

Глава 9

9.1. Обозначим символом ΛV_N внешнюю алгебру, порожденную пространством V_N . Как векторное пространство, она имеет размерность 2^{2N} . Можно отождествить её с подалгеброй в \mathcal{A}_N , порожденной элементом ψ_i . Тогда ψ_i и ψ_i^* соответствуют следующим линейным операторам в ΛV_N :

$$\psi_i : \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \dots \mapsto \psi_i \wedge \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \dots;$$

$$\psi_i^* : \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \dots \mapsto [\psi_i, \psi_{i_1}] + \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge \dots - [\psi_i, \psi_{i_2}] + \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_3} \wedge \dots + \dots$$

Это соответствие осуществляет изоморфизм между алгеброй \mathcal{A}_N и алгеброй всех матриц размера $2^{2N} \times 2^{2N}$.

Утверждение о том, что центр алгебры изоморфен множеству комплексных чисел, может быть показано следующим образом. Пусть a — центральный элемент в \mathcal{A}_N . Так как элемент a коммутирует с оператором $H_0 = \sum_{i>0} \psi_{-i} \psi_i^* - \sum_{i<0} \psi_i^* \psi_{-i}$,

его заряд равен нулю. Определим

$$a = \sum c(m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_r) \psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^*$$

(слагаемое, для которого $r = 0$, есть константа). В этой формуле надо предполагать линейную независимость элементов $\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^*$ в правой части. Рассмотрим коммутатор $[\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_r}^*, \psi_i]$. Этот коммутатор отличен от нуля только при $i = -n_l$ для некоторого l и тогда равен

$$(-1)^{r-l} \psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_{l-1}}^* \psi_{n_{l+1}}^* \dots \psi_{n_r}^*.$$

Очевидно, что эти слагаемые линейно независимы, поэтому каждый коэффициент при них должен быть равен нулю. Мы получим искомое утверждение, если рассмотрим также коммутатор $[\psi_i^*, a]$.

9.2. Предположим, что $\dim V(|u\rangle) = N + r$. Для подходящего элемента $g \in G$ можно записать

$$T_g V(|u\rangle) = \bigoplus_{i > -r} \mathbb{C}\psi_i = V(\psi_{-r+1/2} \dots \psi_{-1/2} |vac\rangle),$$

Используя формулу (9.5) и замечание, следующее после этой формулы, получим

$$V(|u\rangle) = V(g\psi_{-r+1/2} \dots \psi_{-1/2} |vac\rangle).$$

Но так как элемент g сохраняет заряд, это противоречит тому, что вектор $|u\rangle$ имеет заряд 0.

9.4. Ответ:

- (а) $-x_4 - x_2^2/2 + x_2 x_1^2/2 + x_1^4/8$;
- (б) $x_5 x_1 - x_3^2 - x_3 x_1^3/3 + x_1^5/45$;
- (в) $x_6 x_1 - x_4 x_3 + x_4 x_2 x_1 - x_4 x_1^3/6 - x_3^2 x_1/2 - x_3 x_2^2/2 - x_3 x_2 x_1^2/2 - x_3 x_1^4/24 + x_2^3 x_1/6 - x_2^2 x_1^3/12 + x_2 x_1^5/24 + x_1^7/144$.

Глава 10

10.1. Используйте равенства $\psi_{1/2}^* \psi_m(x) = p_{-m-1/2}(x) - \psi_m(x) \psi_{1/2}^*$ и

$$h_{-m-1/2, -n-1/2}(x) = -h_{-m+1/2, -n-3/2}(x) + p_{-m-1/2}(x) q_{-n+1/2}(x).$$

10.3. Ответ:

$$(\chi_{(3)}, \chi_{(2,1)}, \chi_{(1^3)}) = (x_3, x_2 x_1, x_1^3/6) A, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя $(\partial_3, \partial_2 \partial_1, \partial_1^3)$ с помощью матрицы A^{-1} , получим

$$(\chi_{(3)}(\partial_x), \chi_{(2,1)}(\partial_x), \chi_{(1^3)}(\partial_x)).$$

10.4. Ответом является сумма (или разность) соотношений Плюккера (10.4), определенных набором, содержащим пустую диаграмму Юнга заряда -1 и диаграмму Юнга $(1,1,1,1)$ заряда 1 , и соотношений Плюккера, определенных набором, содержащим пустую диаграмму Юнга заряда -1 и диаграмму Юнга $(2,1,1)$ заряда 1 .

Указания к литературе

Данный учебник базируется в основном на результатах по солитонным уравнениям и их симметриям, полученных Киотской школой, возникшей вокруг Мико Сато. Пик деятельности этой группы в данной области приходится на 1981 г. Читателям, желающим изучить эти результаты более подробно, мы рекомендуем следующие работы:

S a t o M. Lecture notes taken by N. Umeda // Kyoto Univ. RIMS Lecture Notes. V. 5. 1989 (на японском языке);

S a t o M. Soliton equations and universal Grassmann varieties: Lecture notes taken by M. Noumi // Saint Sophia Univ. Lecture Notes. V. 18. 1984 (на японском языке);

D a t e E., K a s h i w a r a M., J i m b o M., M i w a T. Transformation groups for soliton equations // Proc. Japan Acad. 1981. V.57 A. P. 342–347, 387–392; J. Phys. Soc. Japan. 1981. V.50. P. 3806–3812, 3813–3818; Physica. 1982. V. 4D. P. 343–365; Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1982. V. 18. P. 1111–1119, P. 1077–1110;

D a t e E., K a s h i w a r a M., J i m b o M., M i w a T. Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems — classical theory and quantum theory (Kyoto, 1981). Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–119;

J i m b o M., M i w a T. Solitons and infinite-dimensional Lie algebras // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.

Есть несколько книг, в которых рассматриваются основы теории солитонов, метод обратной задачи рассеяния, квазипериодические решения и т. д. и их физические и инженерные приложения, но в данной книге мы всех этих вопросов не касались. Укажем несколько книг для тех, кто может читать на японском языке:

T a n a k a T., D a t e E. The KdV equations. Tokyo: Kinokuniya, 1979;

H i r o t a R. Solitons by the direct method. Tokyo: Iwanami, 1992.

Среди наиболее существенных успехов в математических исследованиях начиная с 1970 г. и по настоящее время (1992 г.) является прогресс, достигнутый при взаимодействии между различными областями математики и физики (среди которых теория представлений, дифференциальные уравнения, алгебраическая геометрия, теория чисел, операторные алгебры, топология, комбинаторика и т. д.). Развитие теории солитонов было одним из первых таких достижений. Несомненно,

теория солитонов как ключ к пониманию истории математики в конце XX в. могла бы быть замечательной темой для очерка, но в данный момент мы не взялись бы за такую задачу (скорее всего, это просто невозможно!). Не ясно даже, закончится ли этот процесс в ближайшее время. Мы надеемся, однако, что читатель с интересом просмотрел нашу книгу, и в заключение хотим предложить ему некоторое описание современного состояния литературы в данной области.

Первым и центральным объектом, изучаемым в нашей книге, следует считать бесконечномерные алгебры Ли. Наиболее важными среди этих алгебр являются алгебра Каца–Муди и, в частности, аффинные алгебры Ли. Этой теме посвящена книга

Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.

Гамильтонова редукция по Дринфельду—Соколову представляет собой альтернативную точку зрения на связь между теорией солитонов и аффинными алгебрами Ли:

Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза // Итоги Науки и Техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. М., 1984. V.24. С. 81–180.

Утверждение о том, что вершинные операторы обеспечивают действие аффинных алгебр Ли на пространстве солитонных решений, играет в этой книге центральную роль. В следующих работах вершинные операторы рассматриваются с точки зрения теории представлений:

Lepowsky J., Wilson R. L. Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ // Comm. Math. Phys. 1978. V.62. P. 43–53;

. Frenkel I. B., Kac V. G. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. // Invent. Math. 1980/81. V.62. P. 23–66.

В этих работах рассматривается только случай представлений уровня 1. Рассмотрение общих уровней требует совершенно другого подхода:

Wakimoto M. Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ // Comm. Math. Phys. 1986. V. 104. P. 605–609.;

Feigin B. L., Frenkel E. V. Representations of affine Kac–Moody algebras and bosonization // Physics and mathematics of strings, V. Knizhnik memorial volume, L. Brink and others (eds.). Singapore: World Scientific, 1990. P. 271–316.

В основе конформной теории поля лежит теория представлений бесконечномерных алгебр. Таким способом можно построить конформно-инвариантную квантовую теорию поля, содержащего безмассовые частицы:

Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. 1984. V.241. P. 333–380.

В следующих работах вершинные операторы, связывающие различные неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли, играют роль операторов, действующих на поля:

Tsuchiya A., Kanie Y. Vertex operators in conformal field theory on \mathbb{P}^1 and monodromy representations of braid group // Conformal field theory and solvable lattice models (Kyoto, 1986): Adv. Stud. Pure Math. V. 16. Academic Press, Boston, MA, 1988. P. 297–372.

Можно построить теорию массивных полей как деформацию конформной теории поля, и это есть не что иное, как квантование теории солитонов:

Zamolodchikov A. B. Integrable field theory from conformal field theory // Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics: Adv. Stud. Pure Math. V. 19. Academic Press, Boston, MA, 1989. P. 641–674;

Eguchi T., Yang S.-K. Deformations of conformal field theories and soliton equations // Phys. Lett. 1989. V. 224. P. 373–378;

Feigin B. L., Frenkel E. V. Free field resolutions in affine Toda field theories // Phys. Lett. 1992. V. 276. P. 79–86.

Еще одним приложением теории солитонов является алгебраическая геометрия. Решения солитонных уравнений, которые рассматривались в настоящей книге, представлялись только в виде полиномов или рациональных функций от экспонент. В следующей работе рассматривается наиболее общая ситуация, развивающая старую идею о том, что решения дифференциальных уравнений в эллиптических функциях могут быть получены из решений в терминах θ -функций на алгебраических кривых:

Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, вып. 6 (198). С. 183–208.

С этим направлением японский читатель, владеющий японским языком, может ознакомиться в приведённой выше книге Датэ и Танаки. Обратная проблема состоит в проверке условий при которых θ -функция, определяющая τ -функцию для уравнения КП, соответствует алгебраической кривой. Гипотеза Новикова по этому поводу была положительно подтверждена в следующей работе Т. Шиоты:

Shiota T. Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations // Invent. Math. 1986. V. 83. P. 333–82.

В следующей статье было получено обобщение теории θ -функций при решении задачи конформной теории поля о построении квантовой теории поля на римановых поверхностях:

Tsuchiya A., Ueno K., Yamada Y. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries // Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics: Adv. Stud. Pure Math. V. 19. Academic Press, Boston, MA, 1989. P. 459–566.

Третье направление — интегрируемые системы с бесконечным числом степеней свободы. Мы уже упоминали конформные теории поля. Важные работы, которые появились до создания КТП, — следующие статьи по теории корреляционных функций в модели Изинга, уравнению Пенлеве и изомонодромным деформациям:

W u T. T., M c C o y B. M., T r a c y C. A., B a r o u c h E. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: exact theory in the scaling region // Phys. Rev. 1976. V. 13. P. 316–374;

S a t o M., M i w a T., J i m b o M. Holonomic quantum fields // Publ. RIMS. Kyoto Univ. I. 1978. V. 14. P. 223–267; II. The Riemann–Hilbert problem. 1979. V. 15. P. 201–278; III. 1979. V. 15. P. 577–629. IV. 1979. V. 15. P. 871–972; V. 1980. V. 16. P. 531–584.

Уравнение КdФ применяется и в теории квантовой гравитации, связанной с пространством модулей алгебраических кривых:

K o n t s e v i c h M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Comm. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 1–23.

Уравнения Пенлеве появились также в топологической квантовой теории поля, связывающей конформную теорию и теорию солитонов:

C e c o t t i S., F e n d l e y P., I n t r i l i g a t o r K., V a f a C. A new supersymmetric index // Nuclear Phys. 1992. V. 386. P. 405–452.

Четвертым направлением следует считать теорию квантовых групп. Квантовые группы были введены независимо Дринфельдом и Джимбо:

D r i n f e l d V. G. Quantum groups // Proceedings of the ICM (Berkeley, 1986). Providence, RI: AMS, 1987. P. 798–820;

J i m b o M. Quantum groups and the Yang–Baxter equation. Tokyo: Springer, 1990 (на японском языке).

Квантовые группы возникли из теории точно решаемых решетчатых моделей и квантового метода обратной задачи рассеяния:

B a x t e r R. Точно решаемые модели статистической механики. М.: Мир, 1985.

S k l a n i n E., T a x t a d j a n L., F a d d e e v L. Квантовый метод обратной задачи рассеяния // I. Теорет. матем. физ. 1979. Т. 40. С. 194–220.

Кроме теории решаемых решетчатых моделей, квантовые группы используются во многих областях, таких как теория инвариантов в низкоразмерной топологии, представления в группе кос в конформной теории поля, симметрии точно решаемых массивных теорий поля и т. д. В заключение приведем некоторые ссылки на последние направления, а именно на теорию q -деформаций вершинных операторов:

F r e n k e l I. B., R e s h e t i k h i n N. Y u. Quantum affine algebras and holonomic difference equations // Comm. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 1–60;

S m i r n o v F. A. Dynamical symmetries of massive integrable models // Infinite analysis (Kyoto, 1991): Adv. Ser. Math. Phys. V. 16. World Scientific, River Edge, NJ, 1992. P. 813–837, 839–858;

D a v i e s B., F o d a O., J i m b o M., M i w a T., N a k a y a s h i k i A. Diagonalization of the XXZ Hamiltonian by vertex operators // Comm. Math. Phys. 1993. V. 151. P. 89–153.

Предметный указатель

- Алгебра Ли, 11, 13, 63, 65, 69, 73, 89, 105
— — аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, 70, 73
— — бесконечномерная, 62, 74, 112
— бозонная, 40
— операторная, 52, 40, 66, 111
Антикоммутатор, 42, 54, 63, 86
- Бозон, 41, 51, 54, 71
- Вектор вакуумный, 41, 44, 47, 49, 54, 62, 67, 73, 74, 85, 88, 91, 98
- Вика теорема, 48, 49, 52, 68, 94, 97, 106
- Гейзенберга алгебра, 41, 43, 73
- Генератор инфинитезимальный, 11, 14, 15
- Геометрия проективная, 75
- Грассманнian, 75, 77, 78, 83, 85
- Грассманнian бесконечномерный, 7, 97
- Группа, 10, 13
— бесконечномерная, 7, 62
— квантовая, 114
— преобразований, 7, 9, 10, 13, 62, 67, 70, 71
- Групповое действие, 7, 11, 62
- Диаграмма Майя, 43, 45, 94, 96, 98, 99
— — заряженная, 98, 99
- Юнга, 91, 99
— — заряженная, 95
- Дирака море, 45
- Значение собственное, 16
- Заряд, 45, 47, 48, 58, 63, 66, 86, 88, 91, 93, 95, 98
- Иерархия КdФ, 23, 31, 32, 35, 70, 71
— КП, 24, 25, 35, 37, 39, 67, 69, 70, 71, 85, 99, 101
- Квантовая теория поля, 51, 112
- Клиффорда алгебра, 42, 49, 53, 85, 96
— группа, 85, 87
— сопряжение, 87
- Коммутатор, 12, 17, 39, 54, 63, 65, 73, 105
- Компонента однородная, 100
- Координаты однородные, 78, 80
- Коши тождество, 52, 60
- Лакса форма уравнения, 16, 18, 21, 68
- Оператор вершинный, 27, 32, 33, 35, 66, 69, 71, 74, 105, 112, 114
— , нормальная форма, 52, 55
— псевдодифференциальный, 19, 21, 24, 26, 70
— рождения, 41, 44, 46, 48, 49, 59
— уничтожения, 41, 44, 46, 48, 49, 59, 68, 89
- Орбита, 62, 63, 67, 68, 69, 73, 85, 89, 98
— вакуумная, 89
- Остов, 77
- Переменная спектральная, 16
- Плюккера вложение, 79
— координаты, 78, 79, 81, 84, 85, 101
— соотношения, 75, 80, 83, 84, 89, 91, 97, 99, 102
- Подгруппа параболическая, 77
- Полином дифференциальный, 14, 15
— — однородный, 15, 52
— характеристический, 85, 91

-
- Представление, 41, 43, 66, 67, 73, 91, 112
 Преобразование инфинитезимальное, 9, 11, 13, 18, 33, 40, 69, 71, 74
 Произведение нормальное, 64
 Пространство комплексное проективное, 76
 — проективное, 77, 78, 81
 Прямая комплексная проективная, 76
 Решение солитонное, 29, 33, 35, 38, 69, 70, 71, 112
 — n -солитонное, 29
 Симметрия, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 31, 32, 40, 62
 — бесконечномерная, 13, 22, 23
 Система интегрируемая, 6, 7, 30, 113
 Солитон, 5, 40, 111
 Соответствие бозон-фермионное, 51, 59, 66, 67, 91, 93
 Соотношения антисимметрические, 42, 44, 85
 — коммутационные бозонные, 54
 — канонические, 40, 42, 54
 Среднее вакуумное, 48, 49, 51
 Теория представлений, 111
 Тоды цепочка, 6
 Тождество билинейное, 35, 37, 67, 85, 89, 91, 97
 Точка бесконечная, 76
- Уравнение Буссинеска, 103
 — дифференциальное, 11, 13, 40, 102
 — — линейное, 5, 16, 70
 — — нелинейное, 5, 6, 25
 — КdФ, 5, 7, 9, 13, 16, 17, 23, 27, 32, 38, 40, 70, 71, 74, 114
 — — высшее, 17, 21, 31
 — КП, 7, 34, 40, 62, 66, 68, 69, 113
 — солитонное, 6, 27, 74, 111, 113
 Уровень, 73, 112
 Условие коцикла, 65, 69
- Фермион, 40, 42, 51
 Фока представление, 43, 45, 49
 — пространство, 54, 56, 65, 85, 89
 — — бозонное, 41, 55, 58, 61, 66, 97
 — — фермионное, 44, 58
 Функция волновая, 67
 — — дуальная, 67
 — производящая, 51, 54, 58, 61, 66
 τ -функция, 25, 30, 33, 35, 39, 62, 67, 70, 74, 85, 97, 99, 102, 113
- Характер, 60, 107
 Хироты билинейный метод, 6, 27
 — производная, 7, 27, 32
 — уравнение, 27, 32, 62, 69, 70, 74, 97
 — — дифференциальное, 101, 102
- Экспонента, 12, 29, 31
 Энергия, 45, 47, 48, 55, 60, 86